

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia de Estruturas

Análise Estrutural I

Prof. Marco Antônio Mendonça Vecci
Belo Horizonte, Abril de 1999

Conteúdo

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Energia | 1 |
| 1.1 | Introdução | 1 |
| 1.2 | Energia de Deformação e Energia Complementar | 4 |
| 1.2.1 | Energia de deformação | 5 |
| 1.2.2 | Energia Complementar | 7 |
| 1.3 | Energia de Deformação e Energia Complementar em Três Dimensões . . . | 10 |
| 1.4 | Casos Especiais de Energia de Deformação e Energia Complementar | 16 |
| 1.5 | Energia de Deformação e Energia Complementar em Barras | 18 |
| 1.5.1 | Treliças | 18 |
| 1.5.2 | Vigas | 21 |
| 1.5.3 | Vigas–Coluna | 26 |
| 1.5.4 | Barras Solicitadas por Torção | 26 |
| 1.5.5 | Energia Potencial Total | 30 |
| 1.5.6 | Princípios da Energia Potencial | 32 |
| 1.5.7 | Primeiro Teorema de Castigliano | 38 |
| 1.5.8 | Energia Potencial Complementar | 44 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 1.5.9 | Primeiro Teorema de Engesser | 49 |
| 1.5.10 | Segundo Teorema de Castigliano | 52 |
| 1.5.11 | Os Teoremas da Reciprocidade de Rayleigh-Betti e de Maxwell . . . | 57 |
| 1.5.12 | Segundo Teorema de Engesser | 66 |
| 1.5.13 | Teorema de Castigliano do Trabalho Mínimo (Teorema de Ménabréa) | 71 |
| 2 | Trabalhos Virtuais | 78 |
| 2.1 | Trabalho Virtual em uma partícula | 78 |
| 2.2 | Trabalho Virtual em corpos rígidos | 81 |
| 2.3 | Trabalho Virtual em Corpos Deformáveis | 91 |
| 2.4 | Trabalho Virtual Complementar em Corpos Rígidos | 101 |
| 2.5 | Trabalho Virtual Complementar em corpos deformáveis | 103 |
| 2.6 | Trabalhos Virtuais em Sistemas Estruturais de Barras | 116 |
| 2.6.1 | Treliças | 116 |
| 2.6.2 | Vigas | 118 |
| 2.6.3 | Barras solicitadas por torção | 121 |
| A | Integração das Energias de Deformação e Complementar em Três Dimensões | 131 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | <i>Trajectoria de uma partícula</i> | 2 |
| 1.2 | <i>Partícula Sujeita ao Efeito do Campo Gravitacional</i> | 3 |
| 1.3 | <i>Energia de deformação e complementar.</i> | 6 |
| 1.4 | <i>Estrutura com não-linearidade geométrica.</i> | 9 |
| 1.5 | <i>Forças externas superficiais e de massa sobre um corpo.</i> | 11 |
| 1.6 | <i>(a) Elemento de tração simples. (b) Elemento sujeito às tensões de cisalhamento.</i> | 12 |
| 1.7 | <i>Deslocamento ao longo de uma barra de treliça.</i> | 19 |
| 1.8 | <i>Treliça de duas barras</i> | 20 |
| 1.9 | <i>(a) Linha elástica, Momento de flexão e esforço cortante ao longo de uma viga. (b) Momento estático de uma seção transversal de viga qualquer. (c) Momento estático de viga de seção retangular.</i> | 23 |
| 1.10 | <i>(a) Barra submetida ao esforço de torção T. (b) Seção qualquer sob a ação do momento de torção T.</i> | 28 |
| 1.11 | <i>Área setorial</i> | 29 |
| 1.12 | <i>Corpo Tri-dimensional Sujeito a Forças e Momentos Concentrados</i> | 32 |
| 1.13 | <i>Posições de equilíbrio</i> | 33 |
| 1.14 | <i>Sistema de barra sujeita a carregamentos verticais concentrados</i> | 35 |

| | | |
|------|--|----|
| 1.15 | <i>Treliça constituída de material com curva de tensão-deformação não-linear</i> | 41 |
| 1.16 | <i>Estado de Tensão Uni-axial</i> | 45 |
| 1.17 | <i>Viga engastada com carga na extremidade</i> | 54 |
| 1.18 | <i>Ilustração para o Teorema dos Deslocamentos Recíprocos</i> | 59 |
| 1.19 | <i>Ilustração para o Teorema dos Trabalhos recíprocos</i> | 60 |
| 1.20 | <i>Vigas bi-apoiadas</i> | 62 |
| 1.21 | <i>Vigas bi-apoiadas</i> | 63 |
| 1.22 | <i>Vigas bi-apoiadas</i> | 64 |
| 1.23 | <i>Ilustração para o Segundo Teorema de Engesser</i> | 66 |
| 1.24 | <i>Treliça constituída de material não-linear</i> | 69 |
| 1.25 | <i>Reação de apoio em B como redundante independente</i> | 70 |
| 1.26 | <i>Problema Hiperestático</i> | 72 |
| 1.27 | <i>Problema Hiperestático</i> | 74 |
| 2.1 | <i>Trabalho Virtual em partículas.</i> | 78 |
| 2.2 | <i>Trabalho Virtual em partículas.</i> | 80 |
| 2.3 | <i>Trabalho Virtual em corpo rígido.</i> | 81 |
| 2.4 | <i>Alavanca de Arquimedes.</i> | 83 |
| 2.5 | <i>Sistema de roldanas.</i> | 84 |
| 2.6 | <i>Reação de apoio em uma alavanca.</i> | 85 |
| 2.7 | <i>Reação de apoio em uma viga bi-apoiada.</i> | 87 |
| 2.8 | <i>Esforços solicitantes em uma viga bi-apoiada.</i> | 88 |
| 2.9 | <i>Treliça plana.</i> | 90 |
| 2.10 | <i>Modelo simplificado de um corpo deformável.</i> | 92 |

| | | |
|------|--|-----|
| 2.11 | <i>Sistema de duas molas em série.</i> | 93 |
| 2.12 | <i>Sistema de molas inclinadas.</i> | 94 |
| 2.13 | <i>Sistema de molas paralelas.</i> | 96 |
| 2.14 | <i>Sistema de molas paralelas com deslocamento virtual não-compatível.</i> | 98 |
| 2.15 | <i>Princípio do trabalho virtual complementar.</i> | 101 |
| 2.16 | <i>Trabalho Virtual Complementar de um sistema massa-mola.</i> | 104 |
| 2.17 | <i>(a) Sistema de molas inclinadas. (b) Caso utilizado para determinar u. (c) Caso utilizado para determinar v.</i> | 105 |
| 2.18 | <i>Figuras para exercícios 3 e 4.</i> | 114 |
| 2.19 | <i>Figuras para exercícios 5 e 6.</i> | 114 |
| 2.20 | <i>Figuras do exercício 11</i> | 115 |
| 2.21 | <i>Sistema de três molas em série.</i> | 115 |
| 2.22 | <i>(a) Linha elástica, Momento de flexão e esforço cortante ao longo de uma viga. (b) Momento estático em vigas de seção transversal qualquer da viga. (c) Momento estático em viga de seção retangular.</i> | 120 |
| 2.23 | <i>(a) Barra de seção circular submetida a esforço de torção. (b) Torção em barra de seção qualquer.</i> | 122 |
| 2.24 | <i>Aplicação do P.T.V em treliças.</i> | 124 |
| 2.25 | <i>Figura do exemplo 2.6.1.b</i> | 128 |
| 2.26 | <i>Equilíbrio de forças do sistema</i> | 129 |

Capítulo 1

Energia

1.1 Introdução

Em qualquer tipo de sistema físico, mesmo em modelos como o de um átomo, é possível associar as forças presentes e os possíveis deslocamentos na direção das mesmas, com a capacidade de realizar trabalho, a qual é denominada energia. Sendo inerente à matéria, a energia pode ser observada de diversas maneiras, dependendo, é claro, da natureza das forças existentes no sistema (energia cinética, elétrica, química, térmica, acústica, etc.). Apesar de intimamente relacionados, trabalho e energia são, entretanto, conceitualmente bastante diferentes. As forças, em um determinado sistema realizam trabalho ao passo que o sistema possui energia. Somente haverá realização de trabalho quando ocorre uma alteração na energia do sistema, assumindo outra forma. Assim, a energia química presente na dinamite, pode ser convertida em *calor e energia cinética*, ao realizar trabalho. Em um corpo deformável, o carregamento externo induz o aparecimento de tensões internas, que se modificam até que a configuração de equilíbrio seja alcançada. Para o caso de um material elástico, sabe-se que a forma original do corpo é recuperada após o descarregamento. Conseqüentemente, pode-se afirmar que as forças internas têm uma capacidade de realizar trabalho, definida como *energia de deformação*, pois resulta das deformações desenvolvidas no corpo. Dessa maneira, para se avaliar a quantidade de trabalho realizado em um evento físico, basta que se determine a variação de energia correspondente.

Ainda dentro dessa discussão deve-se ressaltar a validade da *Lei da Conservação da Ener-*

gia para a classe de fenômenos físicos considerados em mecânica dos sólidos. Isto significa que a energia não pode ser criada e nem destruída, sendo, apenas, transformada. Considere para isso uma força \vec{F} atuando sobre uma partícula, figura (1.1). O trabalho realizado no sistema é obtido através da soma, ao longo da trajetória da partícula, do produto escalar entre os vetores de força \vec{F} e trajetória \vec{s} . Sendo F_s a componente da força na direção do caminho percorrido pela partícula e ds o deslocamento infinitesimal na direção desse caminho, o trabalho infinitesimal realizado será:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_s ds \quad (1.1)$$

e o trabalho total realizado ao se mover a partícula da configuração A para B é definido como:

$$W_{AB} = \int_A^B F_s ds \quad (1.2)$$

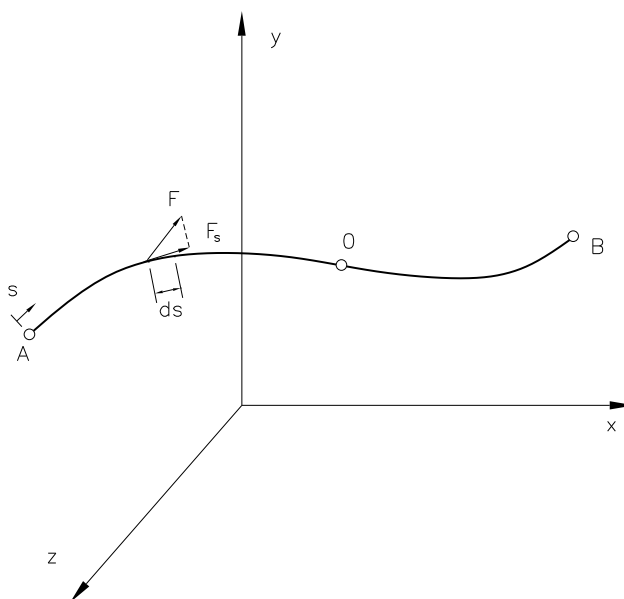


Figura 1.1: *Trajétória de uma partícula*

Em geral, as forças que agem sobre uma partícula podem ser conservativas ou não. Forças não conservativas podem estar associadas à dissipação de energia, *e. g.* atrito, ou mesmo a ganhos de energia, *e. g.* carga externa seguidora. Diferentemente das forças conservativas, tais grandezas não dependem somente da posição e não podem ser derivadas de uma função potencial.

No caso de sistemas conservativos, o trabalho realizado ao mover-se uma partícula entre os pontos A e B depende somente das posições A e B . Logo, a integral da equação 1.2 é independente do caminho de integração. Portanto, o termo $F_s ds$ deve representar o diferencial exato de alguma função potencial.

A energia potencial Π_A , associada à posição A é definida como o trabalho realizado em um campo de forças conservativo, ao se mover a partícula de A para uma posição de referência arbitrária 0:

$$\Pi_A = \int_A^0 F_s ds \quad (1.3)$$

Para se avaliar o trabalho realizado ao se mover a partícula de A para B , no campo de forças conservativo, pode-se considerar uma trajetória que passe pelo referencial 0, uma vez que a integral independe do caminho:

$$W_{AB} = \int_A^B F_s ds = \int_A^0 F_s ds + \int_0^B F_s ds$$

Uma vez que os termos $\int_A^0 F_s ds$ e $\int_0^B F_s ds$ correspondem às energias potenciais em A e B , respectivamente, a equação acima pode ser re-escrita como:

$$W_{AB} = \int_A^0 F_s ds - \int_B^0 F_s ds = \Pi_A - \Pi_B = -[\Pi_B - \Pi_A] = -\Delta\Pi \quad (1.4)$$

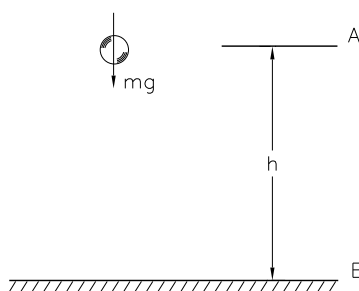


Figura 1.2: *Partícula Sujeita ao Efeito do Campo Gravitacional*

Para melhor compreensão do significado da equação (1.4), considere uma partícula de massa m sujeita à ação do campo gravitacional (constante g), localizada a uma altura h de um plano de referência, figura (1.2). Se a partícula cai até este plano, uma quantidade de trabalho é realizada pela força gravitacional, mg .

Observe que é possível verificar a afirmação de que o importante não é a energia potencial correspondente às duas posições, mas a diferença entre elas. Caso se adote o plano B como plano de referência de energia nula ($\Pi_B = 0$), a energia potencial referente ao plano A será dada por $\Pi_A = mgh$ e o trabalho realizado pelas forças gravitacionais sobre a partícula pode ser calculado através da equação (1.4), tal que:

$$W_{AB} = -\Delta\Pi = -[\Pi_B - \Pi_A] = mgh = \Pi_A \quad (1.5)$$

Para se caracterizar trabalho real em sistemas estruturais, é de interesse determinar a diferença entre as energias potenciais das configurações deformada final, F , e indeformada inicial, I . Geralmente, atribui-se energia potencial zero à configuração indeformada, $\Pi_I = 0$, de maneira que, pela equação (1.4), o trabalho será equivalente ao valor negativo da energia potencial associada à configuração deformada, Π_F .

1.2 Energia de Deformação e Energia Complementar

A energia de deformação e energia complementar formam a base de vários métodos de solução em Análise Estrutural. Esses métodos são aplicáveis a estruturas lineares e não-lineares em geral.

A não-linearidade no comportamento de uma estrutura deve-se basicamente a duas causas. A mais óbvia ocorre quando o material possui curva tensão-deformação não-linear; esse é o caso típico de não-linearidade física do material.

Outra possível não-linearidade é proveniente da geometria da estrutura solicitada. Essa situação ocorre sempre que as deformações estruturais alterarem a ação das cargas nela atuantes. Um exemplo é uma coluna com carga axial de valor acima da carga crítica. Nesse caso, observa-se que mesmo deslocamentos laterais muito pequenos da coluna afetam significativamente os momentos de flexão na coluna. Outro exemplo é o de uma viga submetida a grandes deformação. Em ambos os exemplos, considerou-se que o material da viga permanece elástico linear e, por isso, a não-linearidade era devido apenas às mudanças na geometria da estrutura. Esses são, portanto, exemplos de casos onde ocorre não-linearidade geométrica.

Independentemente da presença de não-linearidade física ou geométrica, admite-se sempre que o material da estrutura esteja sendo solicitado no regime elástico. Assim, os métodos de análise desenvolvidos a partir da energia de deformação e da energia complementar serão válidos para mais de um ciclo de carregamento na estrutura. Para materiais não elásticos esses métodos ainda podem ser válidos durante o primeiro ciclo de carregamento da estrutura.

No caso especial onde existe linearidade física e geométrica, a estrutura comporta-se linearmente e o princípio da superposição pode ser utilizado. Entretanto, no caso de estruturas não-lineares, deve-se estar constantemente alerta para o fato de o princípio da superposição não ser aplicável.

1.2.1 Energia de deformação

Para ilustrar os conceitos de energia considere uma barra prismática sujeita a uma força axial P que produz uma tensão uniformemente distribuída $\sigma = P/A$ figura (1.3.a). A deformação na barra é $\varepsilon = \Delta/l$, onde Δ é a elongação da barra e l o seu comprimento na forma indeformada. O material da barra é considerado elástico com curva tensão-deformação não-linear, como ilustrado na figura (1.3.b). Considerando que a relação força-deslocamento (Fig. 1.3.c) terá a mesma forma geral da curva tensão-deformação, o trabalho realizado pela carga P será:

$$W = \int_0^{\Delta_1} P d\Delta$$

onde Δ_1 é o valor do deslocamento da ponta da barra, ao aplicar-se a carga P , ainda no regime elástico.

Essa expressão de trabalho pode ser interpretada geometricamente como sendo a área abaixo da curva força-deslocamento. Como a barra se comporta elasticamente, uma vez que são desprezadas quaisquer perdas durante o carregamento e o descarregamento, todo o trabalho realizado pela força P será armazenado na barra em forma de energia de deformação elástica, e poderá ser recuperado durante o descarregamento. Assim, a

energia de deformação é igual ao trabalho W , como segue:

$$U = W = \int_0^{\Delta_1} P d\Delta \quad (1.6)$$

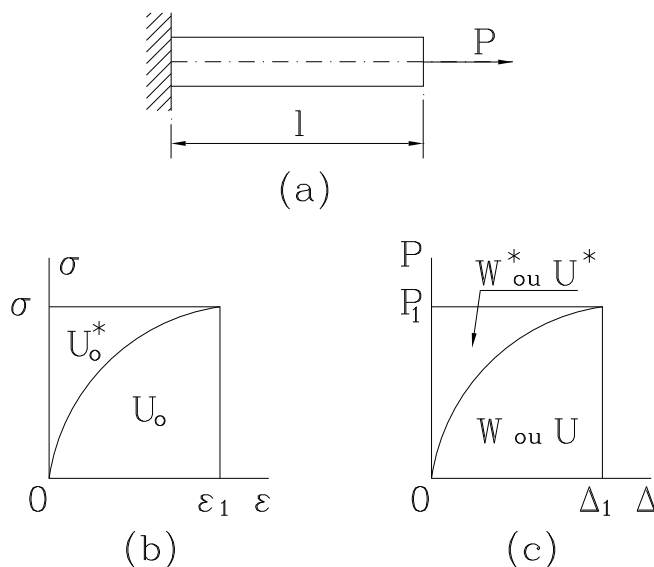


Figura 1.3: *Energia de deformação e complementar.*

A densidade de energia de deformação, definida como sendo a energia de deformação por unidade de volume, U_0 , pode ser obtida considerando-se um elemento de volume diferencial sujeito à tensão σ e deformando-se elasticamente de ε_1 . Ou seja:

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon$$

onde $\varepsilon_1 = \Delta_1/l$ é o valor máximo de Δ/l , ainda no regime elástico.

Essa equação representa a área sob a curva tensão–deformação da figura (1.3.b). Pode-se obter a mesma expressão para U_0 considerando que

$$U_0 = \frac{U}{V} = \frac{U}{A.l} = \int_0^{\Delta_1} \frac{P}{A} \frac{d\Delta}{l} = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \quad (1.7)$$

onde V é o volume da barra.

Reciprocamente, a energia de deformação pode ser obtida através da integração da densidade de energia de deformação sobre o volume total do corpo elástico:

$$U = \int \int \int U_0 dV$$

onde dV é um elemento de volume e a integração nesse caso é realizada sobre todo o volume da barra.

No caso especial de material elástico-linear, em que a curva tensão–deformação obedece a Lei de Hooke, ou seja, $\sigma = E \varepsilon$ ou $P = EA \frac{\Delta}{l}$, as expressões da energia de deformação e densidade de energia de deformação podem ser escritas como:

$$U = \frac{EA\Delta_1^2}{2l} = \frac{P_1^2 l}{2EA} = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 V$$

$$U_0 = \frac{E\varepsilon_1^2}{2} = \frac{\sigma_1^2}{2E} = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1$$

1.2.2 Energia Complementar

Define-se agora o trabalho complementar, W^* , figura (1.3.c), como sendo:

$$W^* = \int_0^{P_1} \Delta \, dP$$

O trabalho complementar é representado pela área entre a curva força–deslocamento e o eixo vertical. Ele não tem significado físico óbvio como o trabalho de deformação W , mas pode-se observar que:

$$W + W^* = P_1 \Delta_1$$

Assim, no sentido geométrico, o trabalho W^* é o complemento do trabalho W , porque ele completa o retângulo indicado na figura (1.3.c). A energia complementar, U^* , da barra é igual ao trabalho complementar das forças atuantes. Ou seja:

$$U^* = W^* = \int_0^{P_1} \Delta \, dP \tag{1.8}$$

A densidade de energia complementar, energia complementar U_0^* por unidade de volume do material, pode ser obtida considerando-se um elemento de volume diferencial sujeito à tensão σ e deformação ε de maneira análoga à definição de densidade de energia de deformação por unidade de volume da barra. Assim,

$$U_0^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon \, d\sigma \tag{1.9}$$

A densidade de energia complementar é representada pela área entre a curva tensão–deformação e o eixo das tensões (Fig. 1.3.b). A energia complementar pode ser obtida de U_0^* por integração, ou seja:

$$U^* = \int \int \int U_0^* dV$$

Quando a curva tensão–deformação for linear, as energias complementar e de deformação possuem mesmos valores. Entretanto, estas duas quantidades de energia são conceitualmente distintas e portanto é necessário mantê-las diferenciadas mesmo para casos lineares em que são numericamente iguais.

Apesar dos conceitos precedentes relativos à energia de deformação e energia complementar estarem relacionados a uma barra tracionada, eles podem ser estendidos para incluir outros casos de carregamento, tais como barras solicitadas por torção, flexão, etc. Portanto, a curva força–deslocamento da figura (1.3.c) pode ser utilizada para relacionar uma carga e seu deslocamento correspondente, para qualquer tipo de estrutura como vigas, pórticos, treliças, etc.. Obviamente, no caso da força ser representada por um momento, o deslocamento Δ deve ser representado pelo ângulo θ na direção do momento.

■ **Exemplo 1.2.1** *Uma estrutura formada por duas barras horizontais, AC e CB, cada uma de comprimento l , está ilustrada na figura (1.4.a). As barras têm suportes articulados e são unidas por um pino em C. O material das barras é linearmente elástico e cada barra tem rigidez axial EA . Determinar as expressões das energias interna e complementar para esse caso.*

Solução

Se uma carga vertical P for aplicada em C, as barras serão incapazes de suportá-la enquanto permanecerem nas suas posição horizontais. Entretanto, como a carga é aplicada gradativamente, a junta C deslocará na direção da carga e as forças de tração passam a atuar na barra. Portanto, uma condição de equilíbrio da estrutura somente poder ser alcançada após a ocorrência de um pequeno deslocamento vertical Δ . Sendo assim, inicialmente necessita-se encontrar a relação entre a carga P e o deslocamento Δ . Essa

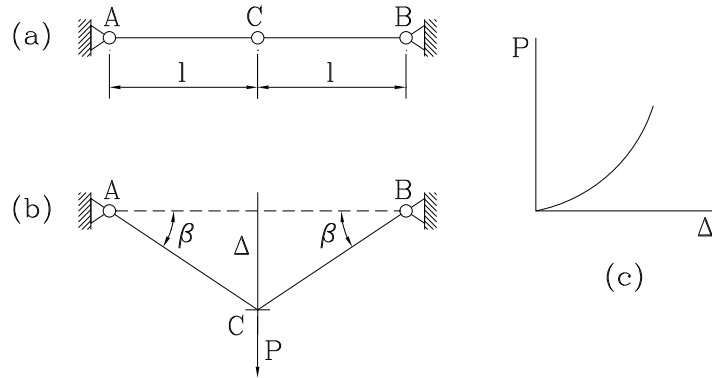


Figura 1.4: Estrutura com não-linearidade geométrica.

relação pode ser obtida efetuando-se o equilíbrio estático do nó C, ou seja:

$$N = \frac{P}{2\text{sen}\beta} \quad (1.10)$$

onde β é o ângulo de rotação das barras. Entretanto, admitindo que o deslocamento Δ e o ângulo β sejam quantidades pequenas, pode-se considerar que $\text{sen}\beta \approx \text{tg}\beta = \Delta/l$, onde l é o comprimento inicial não deformado. Consequentemente, a expressão (1.10) torna-se:

$$N = \frac{Pl}{2\Delta}$$

O Alongamento Δu de cada barra pode ser determinado utilizando-se a equação constitutiva do material. Supondo-se válida a lei de Hooke para essa barra, pode-se escrever que:

$$\Delta u = \frac{Nl}{EA} = \frac{Pl^2}{2EA\Delta} \quad (1.11)$$

Outra equação necessária é a equação de compatibilidade que relaciona o deslocamento Δ da estrutura e o alongamento Δu das barras. Essa relação pode ser obtida da geometria deformada da estrutura. O aumento em comprimento de cada barra será:

$$\Delta u = \sqrt{l^2 + \Delta^2} - l = l \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{l}\right)^2} - l$$

Expandindo a expressão do radical em série de Taylor, na vizinhança de zero, tem-se:

$$\Delta u = l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{l}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\Delta}{l}\right)^4 + \dots \right] - l$$

Para pequenos deslocamentos despreza-se os termos de ordem superior obtendo-se:

$$\Delta u = \frac{\Delta^2}{2l} \quad (1.12)$$

Eliminando-se Δu entre as equações (1.11) e (1.12), obtém-se a relação carga–deslocamento para a estrutura, ou seja:

$$P = \frac{EA\Delta^3}{l^3} \quad \text{ou} \quad \Delta = \sqrt[3]{\frac{Pl^3}{EA}}$$

O gráfico destas equações está representado na figura (1.4.c). é importante frisar que a estrutura analisada nesse exemplo é geometricamente não linear, e que o material obedece a lei de Hooke sendo, portanto, fisicamente linear.

Assim, a energia de deformação da estrutura, dada pela equação (1.6); pode ser expressa como:

$$U = \int_0^{\Delta_1} P d\Delta = \int_0^{\Delta_1} \frac{EA\Delta^3}{l^3} d\Delta = \frac{EA\Delta^4}{4l^3}$$

e a energia complementar, dada por (1.8), pode ser representada por:

$$U^* = \int_0^{P_1} \Delta dP = \int_0^{P_1} \sqrt[3]{\frac{Pl^3}{EA}} dP = \frac{3P_1^{\frac{4}{3}}l}{4\sqrt[3]{EA}}$$

Observe que a energia de deformação está expressa em função do deslocamento, Δ , e a energia complementar em função da força, P . Estas formas de representar as energias são compatíveis com a natureza das definições de U e U^* , porém, em alguns casos é possível expressar a energia de deformação em termos das forças atuantes e/ou deslocamentos, o mesmo sendo possível para a energia complementar.

A seguir, o conceito de energia é estendido para considerar deformação em três dimensões.

1.3 Energia de Deformação e Energia Complementar em Três Dimensões

Considere um sólido em equilíbrio no qual atuam reação de apoio R_i , forças externas de superfície, e forças de campo, como indicado na fig(1.5). Supondo que as forças externas

tenham sido aplicadas estaticamente ao corpo¹, Pela 1ª lei da termodinâmica, tem-se:

$$Q - W = \Delta U$$

onde Q é o calor transferido ao corpo pelo meio ambiente durante o processo de carregamento, W é o trabalho desenvolvido pelas forças externas durante esse mesmo processo e ΔU representa a variação de energia do corpo devido ao aquecimento e ao carregamento. Observe que as reações não exercem trabalho, uma vez que elas não se deslocam. Supõe-se também que não existam deformação plásticas, que o atrito seja desprezível, que ocorram pequenas deformações tal que a variação de energia potencial ($E_p \approx 0$) seja nula. Se o processo for aproximadamente adiabático (sem transferência de calor), então, pode-se eliminar o termo Q . Também, se o trabalho da gravidade for desprezível durante o processo (ou seja, o centro de gravidade não altera substancialmente a sua posição durante o processo de carregamento), então a variação de energia ΔU será simplesmente a variação de energia de deformação do material que resulta do trabalho das forças externas de superfície e das forças de campo, com exclusão da gravidade.

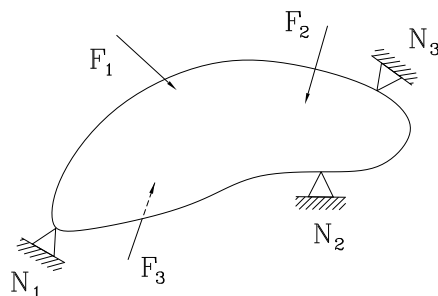


Figura 1.5: *Forças externas superficiais e de massa sobre um corpo.*

Se o material for elástico (não necessariamente linear), não haverá histeresis e o corpo desenvolverá trabalho sobre o meio, durante o processo de descarregamento, de valor igual e contrário ao realizado pelo meio sobre ele durante o processo de carregamento. Assim, pode-se considerar que a energia foi armazenada no corpo como consequência da deformação e essa energia armazenada é igual ao trabalho externo exercido sobre o corpo. A energia armazenada, a qual é disponível como trabalho ao aliviar as cargas

¹aplicadas de forma lenta, de modo que os efeitos dinâmicos, tais como vibrações, possam ser desprezados

estaticamente² é designada por energia de deformação.

Para expressar a energia de deformação no interior do corpo considere, inicialmente, um paralelepípedo retangular infinitesimal sob a ação de tensões normais, como indicado na figura (1.6.a). Representa-se o deslocamento da face 1 na direção x por u_x , e o deslocamento da face 2 na direção x por $u_x + (\partial u_x / \partial x) dx$. O acréscimo de trabalho desenvolvido pelas componentes de tensão σ_{xx} na face 1 e $\sigma_{xx} + (\partial \sigma_{xx} / \partial x) dx$ na face 2 durante os deslocamentos infinitesimais du_x em 1 e $d[u_x + (\partial u_x / \partial x) dx]$ em 2, respectivamente, é dado por:

$$dU = -\sigma_{xx} du_x dy dz + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) d \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dy dz + B_x dx dy dz d \left(u_x + \alpha \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right)$$

onde α é uma constante usada apenas para incluir de forma simplificada o trabalho realizado pela força de corpo na equação acima. Agrupando os termos na expressão precedente, tem-se:

$$dU = \sigma_{xx} d \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} du_x dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} d \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx^2 dy dz + B_x du_x dx dy dz + \alpha B_x d \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx^2 dy dz$$

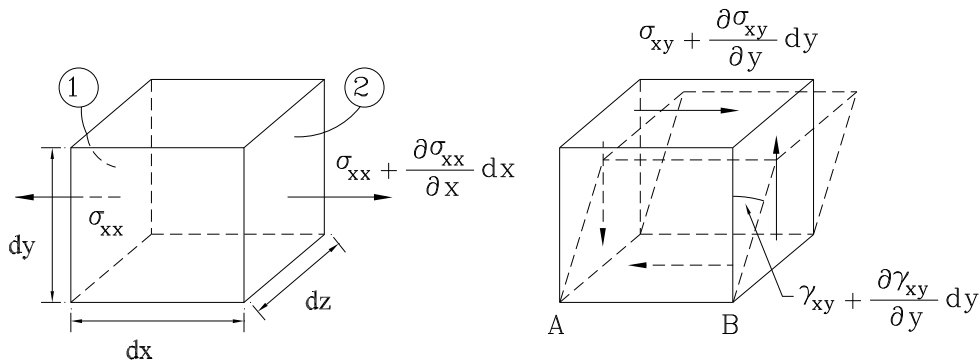


Figura 1.6: (a) Elemento de tração simples. (b) Elemento sujeito às tensões de cisalhamento.

²Energia designada por U ou U_0 . Veja seção 1.2.1.

Desprezando o terceiro e o último termo, uma vez que são de ordem superior³, em relação aos demais, pode-se re-escrever a expressão na forma seguinte:

$$dU = \left\{ \sigma_{xx} d\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + B_x\right) du_x \right\} dx dy dz \quad (1.13)$$

De acordo com as relações de equilíbrio no interior do corpo⁴, a expressão $(\partial \sigma_{xx})/(\partial x) + B_x$ deve ser igual a zero⁵. Substituindo $\partial u_x/\partial x$ por ε_{xx} , obtém-se o acréscimo de trabalho desenvolvido no elemento sob ação de tensões normais dado por

$$dU = \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} dv$$

onde $dv = dx dy dz$.

Considerando tensões e deformação normais nas direções y e z , pode-se obter expressões análogas para o acréscimo de trabalho desenvolvido no elemento devido as tensões normais nessas direções. Para o estado de tensão no elemento, no qual σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} agem simultaneamente, pode-se calcular o acréscimo de trabalho desenvolvido adicionando-se esses resultados. Em material elástico, isto representa um acréscimo de energia de deformação no elemento proveniente das deformações normais, podendo ser representado por:

$$dU = (\sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz}) dv$$

A seguir determina-se a energia de deformação associada às deformação de distorção. Considere um paralelepípedo retangular infinitesimal sujeito à componente de tensão de cisalhamento σ_{xy} , conforme indicado na figura (1.6.b), onde a configuração tracejada mostra a geometria deformada. Admitindo-se, por simplicidade, que o plano inferior permaneça fixo, o trabalho desenvolvido pode ser atribuído à componente de tensão de

³Ordem mais elevada significa que o termo apresenta ordem de potência dos diferenciais maior que os outros termos e, portanto, é muito menor em valor do que os demais termos.

⁴Vecci, M.A.M. e Faria, M.T.C.; “Introdução à Mecânica dos Sólidos”; Departamento de Engenharia de Estruturas da EEUFMG; Março, 1998.

⁵No caso geral, haverá a presença de σ_{xy} e σ_{xz} , mas como a integral que define energia é independente do caminho, pode-se usar a equação $\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + B_x = 0$ com $\sigma_{xy,y} = \sigma_{xz,z} = 0$. Portanto, $\sigma_{xx,x} + B_x = 0$.

cisalhamento na superfície superior, e o acréscimo de trabalho para as deformações $d\gamma_{xy}$ em A e $d[\gamma_{xy} + (\partial\gamma_{xy})/(\partial x)dx]$ em B será:

$$dU = \left[\left(\sigma_{xy} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz \right] \left\{ d \left[\gamma_{xy} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial x} \beta dx \right] dy \right\} \quad (1.14)$$

onde β é constante. Desenvolvendo-se a expressão acima, obtém-se:

$$dU = \left[\sigma_{xy} d\gamma_{xy} + \sigma_{xy} d \left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial x} \right) \beta dx + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} d\gamma_{xy} dy + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} d \left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial x} \right) \beta dx dy \right] dx dy dz$$

Desprezando os três últimos termos, por serem de ordem superior quando comparados ao primeiro termo, pode-se expressar o acréscimo de trabalho desenvolvido pela componente de tensão de cisalhamento e a distorção do elemento associada a ela, como:

$$dU = \sigma_{xy} d\gamma_{xy} dv$$

Expressões análogas podem ser obtidas para o acréscimo de trabalho desenvolvido pelas tensões de cisalhamento σ_{xz} e σ_{yz} . Superpondo os resultados⁶, obtém-se o acréscimo total de energia de deformação devido a distorção. Ou seja,

$$dU = (\sigma_{xy} d\gamma_{xy} + \sigma_{xz} d\gamma_{xz} + \sigma_{yz} d\gamma_{yz}) dv \quad (1.15)$$

Considerando que as componentes de tensão normal não desenvolvem trabalho na presença de distorções, e que as componentes de tensão de cisalhamento não desenvolvem trabalho como resultado de deformação normais, pode-se superpor as equações (1.3) e (1.15) para expressar o acréscimo total de energia de deformação em um elemento infinitesimal do corpo sob um estado de tensão generalizado como segue:

$$dU = (\sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} d\gamma_{xy} + \sigma_{xz} d\gamma_{xz} + \sigma_{yz} d\gamma_{yz}) dv$$

Dividindo por dv e designando o resultado por dU_0 , a densidade de energia de deformação (energia de deformação por unidade de volume) em um ponto, pode ser escrita como:

$$dU_0 = \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} d\gamma_{xy} + \sigma_{xz} d\gamma_{xz} + \sigma_{yz} d\gamma_{yz} \quad (1.16)$$

⁶Isto significa que o trabalho desenvolvido por σ_{xy} ao se realizar uma deformação γ_{xz} ou γ_{yz} é nulo.

De forma genérica, pode-se representar a equação diferencial da função de densidade de energia de deformação em forma de somatório como segue:

$$dU_0 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.17)$$

onde os eixos x , y e z , correspondem aos eixos 1, 2 e 3 respectivamente.

Em analogia à dedução da expressão (1.16), para a densidade de energia de deformação, pode-se mostrar que a expressão para a densidade de energia complementar é dada por:

$$dU_0^* = \varepsilon_{xx} d\sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} d\sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} d\sigma_{zz} + \gamma_{xy} d\sigma_{xy} + \gamma_{xz} d\sigma_{xz} + \gamma_{yz} d\sigma_{yz} \quad (1.18)$$

que também pode ser escrita como:

$$dU_0^* = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (1.19)$$

As expressões da densidade de energia de deformação e energia complementar para materiais isotrópicos, elásticos e homogêneos, estão desenvolvidas no apêndice A. Considerando que $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, a densidade de energia de deformação, (1.16), pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2) + \\ &+ \frac{\nu E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + \\ &- \frac{E}{(1+\nu)} (\varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}^0 \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}^0 \varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{xy}^0 \varepsilon_{xy} + 2\varepsilon_{yz}^0 \varepsilon_{yz} + 2\varepsilon_{xz}^0 \varepsilon_{xz}) + \\ &- \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - \frac{E\alpha\Delta T}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \end{aligned} \quad (1.20)$$

onde ε_{ij}^0 representam componentes de deformação iniciais, e ΔT expressa a variação de temperatura. Nesse caso, E é o módulo de elasticidade do material, ν o coeficiente de Poisson e α o coeficiente de expansão térmica do material.

Similarmente, pode-se demonstrar que a densidade de energia complementar, (1.18), para material elástico, isotrópico e homogêneo pode ser expressa por:

$$U_0^* = \frac{(1+\nu)}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{yz}^2 + 2\sigma_{xz}^2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\nu}{2E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + \\
& + (\varepsilon_{xx}^0 \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy}^0 \sigma_{yy} + \varepsilon_{zz}^0 \sigma_{zz} + 2\varepsilon_{xy}^0 \sigma_{xy} + 2\varepsilon_{yz}^0 \sigma_{yz} + 2\varepsilon_{xz}^0 \sigma_{xz}) + \\
& + \alpha \Delta T (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})
\end{aligned} \tag{1.21}$$

onde utilizou-se o fato de que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

1.4 Casos Especiais de Energia de Deformação e Energia Complementar

Nessa seção obtém-se expressões para a energia de deformação e energia complementar para os casos em que existe componentes de tensão normal e cisalhamento puro, considerando deformação iniciais e efeitos de variação de temperatura no material. Essas componentes de tensão são utilizadas nas teorias de barras solicitadas por tração-compressão, flexão, e torção, as quais são bastante usuais em problemas de engenharia estrutural.

No caso em que somente a componente normal de tensão σ_{xx} é não nula, os tensores de tensão e de deformação podem ser representados por:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{xx} \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

Substituindo as componentes do tensor de deformação acima, na expressão da densidade de energia de deformação U_0 , equação (1.20), vem que:

$$\begin{aligned}
U_0 & = \frac{E}{2(1+\nu)} (1+2\nu^2) \varepsilon_{xx}^2 + \frac{\nu E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (1-2\nu)^2 \varepsilon_{xx}^2 + \\
& - \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_{xx}^0 - \nu\varepsilon_{yy}^0 - \nu\varepsilon_{zz}^0) \varepsilon_{xx} - \frac{\nu E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0) \varepsilon_{xx} + \\
& - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} (1-2\nu) \varepsilon_{xx}
\end{aligned}$$

simplificando:

$$U_0(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xx}^0, \Delta T) = \frac{E}{2} \varepsilon_{xx}^2 - E\varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{xx} - E\alpha\Delta T \varepsilon_{xx} \tag{1.23}$$

A energia de deformação pode ser obtida a partir da densidade de energia de deformação integrando-se sobre o volume total do corpo elástico, ou seja:

$$U = \int_V \left(\frac{E}{2} \varepsilon_{xx}^2 - E\varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{xx} - E\alpha\Delta T \varepsilon_{xx} \right) dV \quad (1.24)$$

Similarmente, a densidade de energia complementar (1.21) para materiais elásticos sob ação do tensor de tensão acima, equação (1.22), pode ser re-escrita como:

$$U_0^* = \frac{(1+\nu)}{2E} \sigma_{xx}^2 - \frac{\nu}{2E} \sigma_{xx}^2 + \varepsilon_{xx}^0 \sigma_{xx} + \alpha\Delta T \sigma_{xx}$$

simplificando,

$$U_0^*(\sigma_{xx}, \varepsilon_{xx}^0, \Delta T) = \frac{1}{2E} \sigma_{xx}^2 + \varepsilon_{xx}^0 \sigma_{xx} + \alpha\Delta T \sigma_{xx} \quad (1.25)$$

Integrando a expressão da densidade de energia complementar sobre o volume, obtém-se a energia total complementar armazenada no corpo elástico. Ou seja:

$$U^* = \int_V \left(\frac{1}{2E} \sigma_{xx}^2 + \varepsilon_{xx}^0 \sigma_{xx} + \alpha\Delta T \sigma_{xx} \right) dV \quad (1.26)$$

Para o cisalhamento puro, os tensores de tensão e de deformação no plano xy podem ser expressos como:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Nesse caso, a equação (1.20) da densidade de energia de deformação U_0 pode ser escrita como:

$$U_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} 2\varepsilon_{xy}^2 - \frac{E}{1+\nu} (2\varepsilon_{xy}^0 \varepsilon_{xy})$$

ou

$$U_0(\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xy}^0) = \frac{E}{2(1+\nu)} 2\varepsilon_{xy}^2 - \frac{E}{1+\nu} (2\varepsilon_{xy}^0 \varepsilon_{xy}) \quad (1.28)$$

Integrando sobre o volume do corpo elástico, obtém-se:

$$U = \int_V \left[\frac{E}{2(1+\nu)} 2\varepsilon_{xy}^2 - \frac{E}{1+\nu} (2\varepsilon_{xy}^0 \varepsilon_{xy}) \right] dV \quad (1.29)$$

que é a expressão da energia de deformação para corpos elásticos submetidos a cisalhamento puro, τ_{xy} . A densidade de energia complementar (1.21) pode ser expressa nesse caso como:

$$U_0^* = \frac{(1+\nu)}{2E} (2\sigma_{xy}^2) + \varepsilon_{xy}^0 \sigma_{xy} \quad (1.30)$$

Após a integração no volume do corpo elástico, a energia complementar total no interior do mesmo, submetido a cisalhamento puro, τ_{xy} , pode ser representada como:

$$U^* = \int_V \left[\frac{(1+\nu)}{2E} (2\sigma_{xy}^2) + 2\varepsilon_{xy}^0 \sigma_{xy} \right] dV \quad (1.31)$$

Na seção seguinte desenvolve-se as expressões para as energias interna e complementar em treliças, vigas e barras solicitadas por torção.

1.5 Energia de Deformação e Energia Complementar em Barras

Nessa seção desenvolve-se expressões específicas das energias, interna e complementar, para treliças (barras submetidas a esforços normais); vigas (barras solicitadas por momentos de flexão e por esforços cortantes); e barras de torção (solicitadas por cisalhamento puro).

1.5.1 Treliças

Por hipótese, as barras da treliça estão solicitadas por uma componente de tensão axial uniforme ao longo da seção transversal. A resultante dessas componentes de tensão na seção está associada aos esforços de tração (ou compressão) das barras. Assim, definindo-

se a direção do eixo x ao longo da barra, como ilustrado na figura (1.7), a componente de deformação normal ε_{xx} pode ser expressa por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} \quad (1.32)$$

onde u é o deslocamento ao longo da barra.

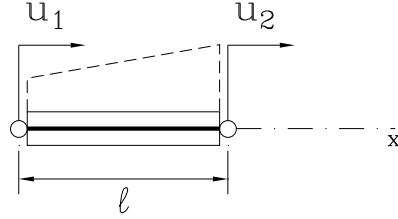


Figura 1.7: Deslocamento ao longo de uma barra de treliça.

Portanto, a energia de deformação para um componente estrutural de treliça pode ser obtida substituindo a equação de deformação–deslocamento (1.32) na equação (1.24), ou seja:

$$U = \int_V \left(\frac{E}{2} (u_{,x})^2 - E u_{,x} \varepsilon_{xx}^0 - E u_{,x} \bar{\varepsilon}^T \right) dV \quad (1.33)$$

Como $u_{,x}$ é função somente de x , tem-se:

$$U = \int_0^l \left\{ \frac{EA}{2} (u_{,x})^2 - E u_{,x} \bar{\varepsilon}^0 - E u_{,x} \bar{\varepsilon}^T \right\} dx \quad (1.34)$$

onde $\bar{\varepsilon}^0 = \int_A \varepsilon_{xx}^0 dy dz$ é o deslocamento inicial por unidade de comprimento e $\bar{\varepsilon}^T = \int_A \alpha \Delta T dy dz$ é o deslocamento proveniente da deformação térmica por unidade de comprimento da barra na direção x e $\Delta T = T_{final} - T_{inicial}$.

Analogamente, a componente de tensão normal na direção x pode ser expressa por:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A}$$

Assim, a energia complementar será obtida substituindo a equação acima na equação (1.25),

$$U^* = \int_V \left\{ \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} \right)^2 + \varepsilon_{xx}^0 \left(\frac{N}{A} \right) + \alpha \Delta T \left(\frac{N}{A} \right) \right\} dV$$

como $N = N(x)$, pode-se reescrever a equação da energia complementar como:

$$U^* = \int_0^l \left\{ \frac{N^2}{2EA} + \left(\frac{N}{A} \right) \int_A \varepsilon_{xx}^0 dy dz + \left(\frac{N}{A} \right) \int_A \alpha \Delta T dy dz \right\} dx$$

ou

$$U^* = \int_0^l \frac{1}{2EA} \{ N^2 + 2N N_0 + 2N N_T \} dx \quad (1.35)$$

onde

$$N_0 = \int_A E \varepsilon_{xx}^0 dy dz$$

$$N_T = \int_A E \alpha \Delta T dy dz$$

e $\Delta T = T_{final} - T_{inicial}$.

Na expressão acima, ε_{xx}^0 representa as deformações iniciais na barra que podem ter sido provenientes de defeitos de fabricação, recalque de apoios, etc.

■ **Exemplo 1.5.1** *Determinar a energia de deformação complementar da treliça de duas barras da figura (1.8). Suponha que após sua construção a treliça é submetida a uma condição de trabalho em que a temperatura do ambiente é acrescida de ΔT . Expressar a energia complementar em função da carga P , H , E , A , α e ΔT .*

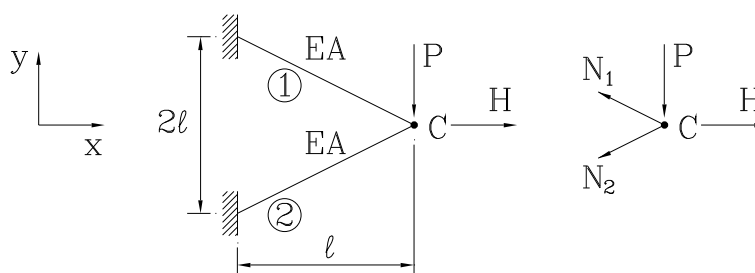


Figura 1.8: Treliça de duas barras

Solução:

Pelo equilíbrio do nó C, tem-se:

$$N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0$$

$$-N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + H = 0$$

ou

$$N_1 - N_2 = P\sqrt{2}$$

$$N_1 + N_2 = H\sqrt{2}$$

logo

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(H + P)$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(H - P)$$

$$N_T = \int_A E\alpha\Delta T dydz$$

$$N_T = EA\alpha\Delta T$$

portanto, pela eq.(1.35), a energia interna complementar pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} U^* &= \int_0^{l_1} \frac{1}{2EA} \left\{ (H + P)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 2(H + P) \frac{\sqrt{2}}{2} EA\alpha\Delta T \right\} dx + \\ &+ \int_0^{l_2} \frac{1}{2EA} \left\{ (H - P)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 2(H - P) \frac{\sqrt{2}}{2} EA\alpha\Delta T \right\} dx \\ &= \frac{1}{2EA} (H^2 + 2HP + P^2) \frac{l_1}{2} + (H + P) \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha l_1 \Delta T + \\ &+ \frac{1}{2EA} (H^2 - 2HP + P^2) \frac{l_2}{2} + (H - P) \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha l_2 \Delta T \end{aligned}$$

mas $l_1 = l_2 = l\sqrt{2}$, então:

$$U^* = \frac{1}{2EA} (H^2 + P^2) l\sqrt{2} + 2H\alpha l \Delta T \quad (1.36)$$

1.5.2 Vigas

Nessa seção desenvolve-se as expressões de energia para barras solicitadas por esforços de flexão e cortante. O momento de flexão está relacionado á variação da tensão normal na

seção, enquanto que o esforço cortante é a resultante da componente de tensão de cisalhamento na seção transversal do componente estrutural. Assim, na energia de deformação de vigas considera-se a contribuição das componentes de tensão normal e de cisalhamento que ocorrem ao longo da seção das mesmas.

Considerando, inicialmente, a contribuição das componentes normais de tensão, e supondo que seção planas no estado deformado permanecem planas (hipótese de Euler–Bernoulli), a componente de deformação normal ao longo do eixo x será dada por:

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{z}{\rho} = -zw_{,xx}$$

onde ρ é o raio de curvatura da seção deformada e $w_{,xx} = \frac{d^2w}{dx^2}$ é a derivada segunda do deslocamento da linha elástica, w .

Assim, a energia de deformação para vigas devido à componente normal de tensão, é obtida substituindo a expressão da deformação normal ε_{xx} na equação (1.24), ou seja:

$$U = \int_V \left(\frac{E}{2} (zw_{,xx})^2 + Ezw_{,xx} \varepsilon_{xx}^0 + Ezw_{,xx} \varepsilon_{xx}^T \right) dV \quad (1.37)$$

Como $w_{,xx}$ é função somente de x , tem-se:

$$U = \int_0^l \left\{ \frac{EI}{2} (w_{,xx})^2 + Ew_{,xx} w^0 + Ew_{,xx} w^T \right\} dx \quad (1.38)$$

onde $w^0 = \int_A z \varepsilon_{xx}^0 dy dz$ é o deslocamento inicial da linha elástica por unidade de comprimento; e $w^T = \int_A z \alpha \Delta T dy dz$ é o deslocamento por unidade de comprimento da linha elástica devido à variação de temperatura na barra; e $\Delta T = T_{final} - T_{inicial}$. Note que em geral, ΔT varia ao longo de y e z , ou seja, $\Delta T = \Delta T(y, z)$

Para considerar-se as deformações de cisalhamento ε_{xz} , supõe-se que estas sejam variáveis ao longo da seção transversal. Pode-se, assim, definir uma deformação média de cisalhamento na seção, $\beta(x)$, a qual é corrigida por um fator k^7 .

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \beta(x, z) = \frac{1}{2} \sqrt{k} \beta(x)$$

⁷Esse procedimento foi sugerido por Timoshenko em: Timoshenko, S.P., “On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibration of Prismatic Bars”, *Philosophical Magazine*, vol. 41, 1921, pp. 733-746.

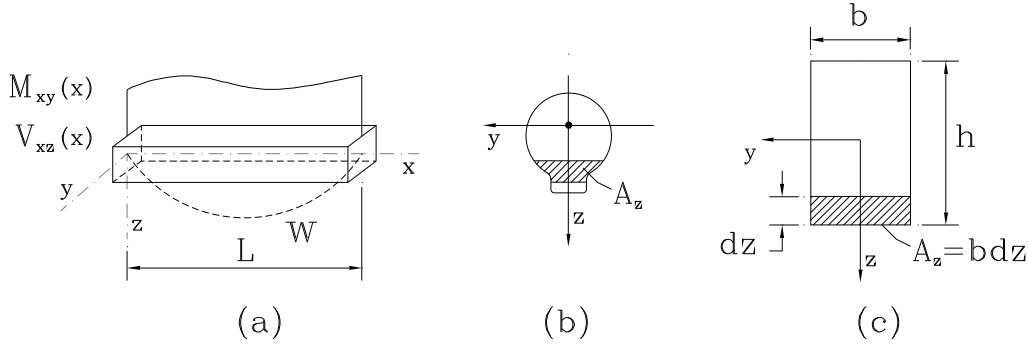


Figura 1.9: (a) Linha elástica, Momento de flexão e esforço cortante ao longo de uma viga. (b) Momento estático de uma seção transversal de viga qualquer. (c) Momento estático de viga de seção retangular.

O fator de correção \$k\$ é função da geometria da seção transversal da barra [Cowper,1966]. Substituindo \$\varepsilon_{xz}\$ na expressão da energia de deformação⁸ (1.29), tem-se:

$$U = \int_V \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{2} k \beta^2(x) \right) - \frac{E}{2(1+\nu)} 2(\sqrt{k})\beta(x)\varepsilon_{xy}^0 \right] dV$$

ou,

$$U = \int_0^l \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{2} A k \beta^2(x) \right) - \frac{E}{2(1+\nu)} \left(2\sqrt{k}\beta(x) \int_A \varepsilon_{xy}^0 dy dz \right) \right] dx$$

Portanto, a energia interna devido às componentes normais e de cisalhamento podem ser escritas como:

$$U = \int_0^l \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{2} A k \beta^2(x) \right) - \frac{E}{2(1+\nu)} \left(2\sqrt{k}\beta(x) \int_A \varepsilon_{xy}^0 dy dz \right) \right] dx + \int_0^l \left[\frac{EI}{2} (w_{,xx})^2 + E w_{,xx} w^0 + E w_{,xx} w^T \right] dx \quad (1.39)$$

No caso da energia complementar, o tensor tensão para vigas submetidas a carregamentos distribuídos ao longo do eixo \$x\$, é dado por⁹:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \frac{M_y z}{I_{yy}} & 0 & -\frac{V_{xz} Q_y}{I_{yy} b} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{V_{xz} Q_y}{I_{yy} b} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

⁸Nesta equação o cisalhamento \$\varepsilon_{xy}\$ foi substituído por \$\varepsilon_{xz}\$.

⁹Crandall, S. H. et al., "An Introduction to the Mechanics of Solids", 2nd ed., McGraw-Hill, 1978.

onde M_y é o momento de flexão; V_{xz} , o esforço cortante na direção z atuante na área de direção normal paralela ao eixo x ; $Q_y = \int_{A_z} z \, dy \, dz$ é o momento estático (função da geometria da seção transversal) como ilustrado na figura (1.9b e c); b , a largura da seção na direção y e I_{yy} , o momento de inércia da seção transversal.

Assim, a expressão da energia complementar na presença de componentes de tensão normal (1.26) e de cisalhamento (1.31), em vigas, será dada por:

$$U^* = \int_V \left[\frac{1}{2E} \left(\frac{M_y z}{I_{yy}} \right)^2 + \varepsilon_{xx}^0 \frac{M_y z}{I_{yy}} + \alpha \Delta T \frac{M_y z}{I_{yy}} \right] dV + \int_V \left[\frac{(1+\nu)}{E} \left(\frac{V_{xz} Q_y}{I_{yy} b} \right)^2 - 2\varepsilon_{xy}^0 \frac{V_{xz} Q_y}{I_{yy} b} \right] dV$$

como M_y e V_{xz} são funções apenas de x , obtém-se:

$$U^* = \int_0^l \left[\frac{1}{2E} \left(\frac{M_y^2}{I_{yy}^2} \int_A z^2 \, dy \, dz + 2E \frac{M_y}{I_{yy}} \int_A z \varepsilon_{xx}^0 \, dy \, dz + 2E \frac{M_y}{I_{yy}} \int_A z \alpha \Delta T \, dy \, dz \right) \right] dV + \int_0^l \left[\frac{(1+\nu)}{E} \left(\frac{V_{xz}^2}{A} \right) \left(\frac{A}{I_{yy}^2} \int_A \frac{Q_y^2}{b^2} \, dy \, dz \right) + 2 \left(\frac{V_{xz}}{A} \right) \left(\frac{A}{I_{yy}} \int_A \frac{Q_y}{b} \varepsilon_{xy}^0 \, dy \, dz \right) \right] dV \quad (1.41)$$

onde,

$$I_{yy} = \int_A z^2 \, dy \, dz$$

Definindo,

$$\begin{aligned} M_y^0 &= \int_A E \varepsilon_{xx}^0 z \, dy \, dz \\ M_y^T &= \int_A E \alpha \Delta T z \, dy \, dz \\ \chi_z &= \frac{A}{I_{yy}^2} \int_A \frac{Q_y^2}{b^2} \, dy \, dz \\ V_{xz}^0 &= \frac{2EA}{(1+\nu)I_{yy}} \int_A \frac{\varepsilon_{xy}^0 Q_y}{b} \, dy \, dz \end{aligned} \quad (1.42)$$

a energia complementar, para vigas, pode ser re-escrita como:

$$U^* = \int_0^l \left[\frac{1}{2EI_{yy}} M_y^2 + \frac{M_y M_y^0}{I_{yy}} + \frac{M_y M_y^T}{I_{yy}} \right] dx + \int_0^l \left[\frac{(1+\nu)}{E} \chi_z \left(\frac{V_{xz}^2}{A} - 2 \sqrt{\chi_z} V_{xz} V_{xz}^0 \right) \right] dx \quad (1.43)$$

Onde χ_z , de acordo com a equação (1.42), é definido como sendo o fator de forma da seção transversal, o qual é função somente da geometria da seção transversal da barra.

■ **Exemplo 1.5.2** *Determinar χ_z para o caso de vigas de seções retangulares*

Solução:

Para barras prismáticas de seções retangulares, figura (1.9), o fator de forma χ_z pode ser determinado por:

$$\chi_z = \frac{A}{I_{yy}^2} \int_A \frac{Q_y^2}{b^2} dy dz$$

onde,

$$Q_y = \int_{A_z} z dy dz = b \int_z^{\frac{h}{2}} z dz = \frac{b}{2} \left[\frac{h^2}{4} - z^2 \right]$$

Assim, o fator de forma pode ser escrito como:

$$\chi_z = \frac{A}{I_{yy}^2} \int_A \frac{1}{4} \left[\frac{h^2}{4} - z^2 \right]^2 dy dz = \frac{A}{I_{yy}^2} \left[\frac{bh^5}{120} \right]$$

como $A = bh$ e $I_{yy} = \frac{bh^3}{12}$, obtém-se:

$$\chi_z = \frac{6}{5}$$

Na tabela 1.1¹⁰ lista-se fatores de forma para algumas seções transversais:

| Seção | Fator de forma χ_z |
|----------------------|-------------------------|
| Retangular | 6/5 |
| Circular | 10/9 |
| Tubo de parede fina | 2 |
| Perfil Caixaõ ou "I" | A/A_{alma} |

Tabela 1.1: Fatores de forma χ_z .

¹⁰Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.; "Mecânica dos Sólidos" ;LTC; 1982.

1.5.3 Vigas–Coluna

Observe que a energia é uma função não-linear e, como tal, seus termos não podem ser simplesmente superpostos uns aos outros. No caso específico de viga–coluna, as energias de viga e de treliça podem ser adicionadas desde que o sistema de eixos contenha o eixo elástico da viga como se mostra a seguir:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{I}$$

Assim, a energia complementar pode ser escrita como:

$$U^* = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma_{xx}^2}{E} dV$$

Substituindo a expressão da componente de tensão normal na equação da energia, vem que:

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \frac{1}{E} \left(\frac{N}{A} + \frac{Mz}{I} \right)^2 dy dz dx$$

ou

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \left(\frac{N^2}{EA^2} + 2 \frac{N}{EA} \frac{Mz}{I} + \frac{M^2 z^2}{EI^2} \right) dy dz dx$$

Considerando que $\int_A dy dz = A$, $\int_A z^2 dy dz = I$ e que $\int_A z dy dz = 0$, uma vez que z é a coordenada do sistema onde x coincide com o eixo elástico da barra e, portanto, tem momento estático nulo, obtém-se:

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

Observe, no entanto, que este é um caso bastante particular e que, em geral, o termo da energia difere do valor obtido pela simples soma da contribuição de diferentes termos na expressão da energia.

1.5.4 Barras Solicitadas por Torção

Embora considere-se, inicialmente, barras de seção circular essa formulação pode ser estendida para barras prismáticas de seções quaisquer.

Para barras de seção circular, é conveniente expressar o tensor de deformação em coordenadas polares figura (1.10). Assim, a energia de deformação pode ser escrita como:

$$U = \int_V \left[\frac{E}{2(1+\nu)} 2\varepsilon_{\theta z}^2 - \frac{E}{(1+\nu)} (2\varepsilon_{\theta z}^0 \varepsilon_{\theta z}) \right] dV$$

Na torção, a deformação de cisalhamento $\varepsilon_{\theta z}$ é dada por:

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{\gamma_{\theta z}}{2} \quad \text{como,} \quad \gamma_{\theta z} dz = r d\theta \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{r}{2} \frac{d\theta}{dz}$$

Substituindo $\varepsilon_{\theta z}$ na expressão da energia de deformação, vem que:

$$U = \int_V \left[\frac{E}{2(1+\nu)} 2 \left(\frac{r}{2} \frac{d\theta}{dz} \right)^2 - \frac{E}{(1+\nu)} (2\varepsilon_{\theta z}^0 \frac{r}{2} \frac{d\theta}{dz}) \right] dV$$

ou,

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \int_A r^2 dA - \frac{E}{(1+\nu)} \frac{d\theta}{dz} \int_A \gamma_{\theta z}^0 r dA \right] dz$$

Lembrando que $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, vem que:

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \left[G J \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - 2G \frac{d\theta}{dz} \int_A \gamma_{\theta z}^0 r dA \right] dz \quad (1.44)$$

onde,

$$J = \int_A r^2 dA$$

Pode-se mostrar que para seção transversais não circulares, a energia de deformação de torção¹¹ é dada por:

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \left[G J^* \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right] dz$$

A componente de tensão de cisalhamento em barras de seção circular solicitadas por torção pode ser expressa por:

$$\sigma_{\theta z} = \frac{Tr}{J}$$

¹¹A expressão geral de J^* para seção quaisquer será obtida na dedução da expressão da energia complementar (Página 29).

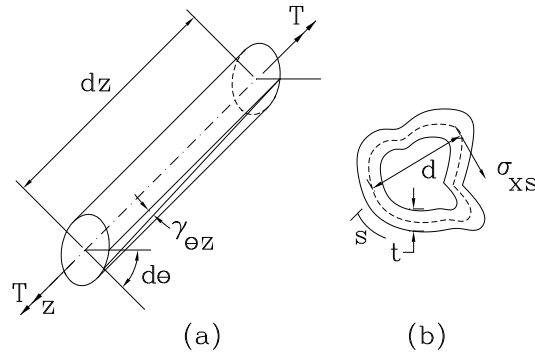


Figura 1.10: (a) Barra submetida ao esforço de torção T . (b) Seção qualquer sob a ação do momento de torção T .

como a energia complementar em coordenadas polares é dada por:

$$U^* = \int_V \left[\frac{(1 + \nu)}{2E} (2\sigma_{\theta z}^2) + 2\varepsilon_{\theta z}^0 \sigma_{\theta z} \right] dV$$

tem-se:

$$U^* = \int_V \left[\frac{(1 + \nu)}{E} \left(\frac{Tr}{J} \right)^2 + 2\varepsilon_{\theta z}^0 \frac{Tr}{J} \right] dV$$

ou,

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{2(1 + \nu)}{E} \left[\frac{T^2}{J^2} \int_A r^2 dA + \frac{2T}{J} \int_A \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{\theta z}^0 r dA \right] dz$$

Simplificando, tem-se:

$$U^* = \int_0^l \frac{1}{2GJ} (T^2 + 2TT^0) dz \tag{1.45}$$

onde J é o momento polar de inércia, e

$$T^0 = \int_A G \gamma_{\theta z}^0 r dA$$

Em seções fechadas de parede fina¹², a componente de tensão de cisalhamento, ilustrada na figura (1.10.b) é dada por:

$$\sigma_{xs} = \frac{q}{t} = \frac{T}{2A_p t}$$

¹²Relação entre espessura da parede t e dimensões características da seção, d , deve ser $\frac{t}{d} \leq 10$.

onde A_p é a área compreendida no interior do perímetro constituído pela linha média da parede fina.

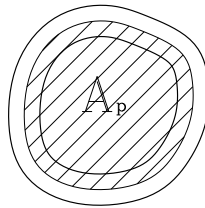


Figura 1.11: Área setorial

Substituindo essa relação na expressão da energia complementar, tem-se:

$$U^* = \int_V \left[\frac{(1+\nu)}{E} \left(\frac{T}{2A_p t} \right)^2 + 2\varepsilon_{\theta z}^0 \frac{T}{2A_p t} \right] dV$$

ou,

$$\begin{aligned} U^* &= \int_0^l \frac{(1+\nu)}{E} \left[\left(\oint \frac{T^2}{4A_p^2 t^2} t ds \right) + \frac{E}{(1+\nu)} \oint \gamma_{\theta z}^0 \frac{T}{2A_p t} t ds \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{2(1+\nu)}{E} \left[T^2 \left(\frac{1}{4A_p^2} \oint \frac{ds}{t} \right) + T \left(\frac{E}{2A_p(1+\nu)} \oint \gamma_{\theta z}^0 ds \right) \right] dz \\ &= \int_0^l \frac{1}{2GJ^*} (T^2 + 2TT^0) dz \end{aligned}$$

onde,

$$J^* = \frac{4A_p^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad \text{e} \quad T^0 = \frac{GJ^*}{2A_p} \oint \gamma_{\theta z}^0 ds \quad (1.46)$$

é possível demonstrar¹³, através da teoria de Saint-Venant, que a energia complementar para barras solicitadas por torção pode ser genericamente expressa por:

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GJ^*} dz$$

¹³Rivello, R. M., "Theory and Analysis of Flight Structures", McGraw-Hill, 1969.

onde,

$$J^* = \begin{cases} \int_A r^2 dA & \text{Seção Circular;} \\ \frac{4A_p^2}{\oint \frac{ds}{t}} & \text{Seção Fechada de parede fina;} \\ \approx \frac{1}{3} \int_0^b t^3(\xi) d\xi & \text{Seção Aberta de parede fina.} \end{cases}$$

Em geral,

$$J^* = -\frac{4}{\nabla^2 \psi} \int_A \psi dA$$

onde ψ é a função de tensão de Prandtl.

1.5.5 Energia Potencial Total

Entre as diversas formas possíveis de energia, apenas aquelas que descrevem o comportamento estático da estrutura estão sendo consideradas neste texto. Para isso, suponha que, durante a aplicação das cargas, os componentes estruturais apresentem deformações e deslocamentos infinitesimais causados por carregamentos aplicados estaticamente (lentamente). Tal suposição, aliada à hipótese de que o fenômeno seja adiabático, permite que se despreze pequenas mudanças nas energias cinética e térmica que ocorrem durante a deformação. Entre as forças capazes de realizar trabalho sobre um determinado corpo deformável, dentro do regime elástico, encontram-se:

- Carregamento externo:
 - Forças de volume, F_i , que podem ser induzidas por campos gravitacionais e magnéticos, forças de campo.
 - Forças de superfície, T_i , representadas por forças e momentos concentrados, P_i , aplicados monotonicamente.
- Forças internas, representadas pelas tensões no interior do corpo, induzidas pelo carregamento.

Dessa maneira, dentro das hipóteses levantadas, a energia potencial total é a soma das energias potenciais das forças externas e internas.

Na expressão (1.4), foi visto que a variação na energia potencial equivale ao valor negativo do trabalho realizado. O mesmo deve, portanto, valer quando se trata da energia potencial das forças externas, $\Delta\Pi_E$. Uma vez que para a configuração indeformada foi atribuída energia potencial nula, $\Pi_I = 0$, chega-se à conclusão de que ao final do carregamento, quando se alcança a configuração deformada ter-se-á:

$$W_E = -\Delta\Pi_E = -\Pi_F = - \int_F^0 F_s ds = \int_0^F F_s ds \quad (1.47)$$

sendo Π_F , a energia potencial do sistema na configuração deformada e F_s o carregamento externo atuante.

Assim, o trabalho externo, W_E realizado pelas forças de superfície e de volume, enquanto o corpo se deforma de uma configuração inicial I para uma final F , pode ser definido como:

$$W_E = \int_V \left[\int_0^F (F_x du + F_y dv + F_z dw) \right] dV + \int_{S_1} \left[\int_0^F (T_x du + T_y dv + T_z dw) \right] dS \quad (1.48)$$

onde S_1 corresponde à região da superfície onde estão prescritas as forças e os momentos.

Uma vez que as forças de superfície e de volume *não dependem* dos deslocamentos provenientes das deformações internas, a expressão (1.48) pode ser re-escrita como:

$$W_E = \int_V (F_x u + F_y v + F_z w) dV + \int_{S_1} (T_x u + T_y v + T_z w) dS \quad (1.49)$$

sendo u , v e w os deslocamentos de cada ponto do sistema na configuração deformada, dependentes de todo o carregamento e não apenas das cargas atuantes nas direções destes deslocamentos específicos.

Geralmente, em diversos problemas de interesse prático, o trabalho realizado pelas forças de volume é desconsiderado se comparado à intensidade do trabalho realizado pelas forças de superfície. Sendo Δ_i os deslocamentos (e rotações) correspondentes¹⁴ às forças (e

¹⁴Mesma posição e direção.

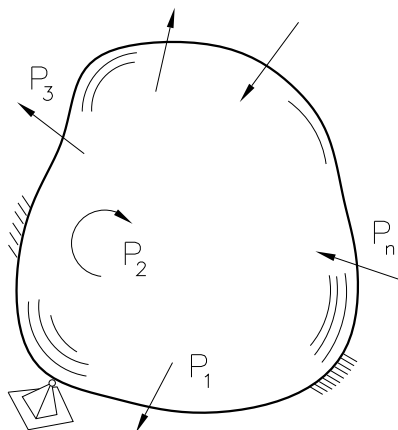


Figura 1.12: *Corpo Tri-dimensional Sujeito a Forças e Momentos Concentrados*

momentos) concentrados P_i , figura (1.12), o trabalho externo total W_E pode, finalmente, ser definido como¹⁵:

$$W_E = \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i = -\Pi_F \quad (1.50)$$

onde n é o número de forças (e momentos) atuando sobre o corpo.

Já a energia de deformação interna, U , pode ser entendida como a capacidade das forças internas (tensões) de realizar trabalho em virtude do estado deformado do corpo elástico. Como descrito nas seções anteriores, tal energia também é calculada a partir da configuração inicial indeformada I , até a deformada final F .

Conhecendo-se, então, o trabalho realizado pelas forças externas e a energia de deformação interna, a energia potencial total do sistema pode ser definida como:

$$\Pi = U + \Pi_F = U - W_E \quad (1.51)$$

1.5.6 Princípios da Energia Potencial

Antes de se apresentar os Princípio da energia potencial total, deve-se estabelecer a diferença entre equilíbrio estável e instável. Basicamente, o equilíbrio estável ocorre quando,

¹⁵Observe que os deslocamentos Δ_i resultam da aplicação de todas as cargas e não apenas da força P_i correspondente.

após uma pequena perturbação, o sistema retorna à sua configuração original. Caso contrário tem-se o equilíbrio instável ou indiferente.

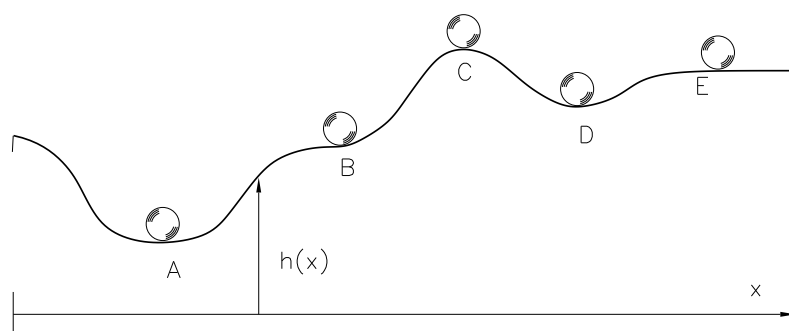


Figura 1.13: *Posições de equilíbrio*

Observando as várias posições de uma bola de gude sobre uma superfície lisa, figura (1.13) é possível ilustrar as possíveis configurações de equilíbrio em um sistema. Para se obter a energia potencial total em cada situação, considere a bola de gude como um corpo rígido de massa m . Não haverá, portanto, deformação, fazendo com que a energia de deformação U seja igual a zero. A única forma de energia presente será, então, a energia potencial gravitacional, obtida em função da altura relativa, $h(x)$, a um plano de referência arbitrário, e da constante gravitacional g :

$$\Pi = mgh(x) \quad (1.52)$$

Na equação acima nota-se que x é a única variável independente, sendo suficiente para descrever a energia potencial total. é, por isso, denominada *coordenada generalizada*. Além disso, qualquer deslocamento consistente¹⁶ no sistema pode ser descrito em função de x . Sendo assim, a variação da energia potencial total em relação à coordenada x , $\frac{d\Pi}{dx}$, pode ser escrita como:

$$\frac{d\Pi}{dx} = mg \frac{dh(x)}{dx} \quad (1.53)$$

Note que as posições A , B , C , D e E , que correspondem às configurações de equilíbrio estático, satisfazem a relação:

$$\frac{dh(x)}{dx} = 0 \quad (1.54)$$

¹⁶Compatível com as condições de contorno.

Portanto, nas configurações de equilíbrio estático, A , B , C , D e E , tem-se que:

$$\frac{d\Pi}{dx} = 0 \quad (1.55)$$

ou seja, a energia potencial total correspondente a tais posições é estacionária. Este é o significado do **Princípio da Energia Potencial Total Estacionária**, formulado da seguinte maneira:

“Se um sistema estrutural está em equilíbrio estático, sua energia potencial total assumirá um valor estacionário”.

Analisando-se a equação (1.52) verifica-se que, para pequenas variações na coordenada generalizada x , a energia potencial total nas posições A e D sofre um acréscimo. Tais posições correspondem às configurações de equilíbrio estável, uma vez que após pequenas perturbações ^{footnote}Pequeno deslocamento compatível, função de x ., a bola de gude retorna a seu ponto original. O mesmo não ocorre em C , onde qualquer variação em x acarreta uma alteração em sua configuração. Nesse caso, a bola de gude se desloca sobre a ação da força gravitacional, realizando trabalho e, portanto, reduzindo a energia potencial total do sistema. Tal fenômeno pode ainda ser observado através da equação (1.52), à medida que se reduz o valor de $h(x)$. Na posição E ocorre a condição de equilíbrio indiferente pois pequenos deslocamentos do corpo não implicam em mudança da altura $h(x)$, e conseqüentemente, a energia potencial total permanece a mesma. Outra situação peculiar encontra-se na posição de equilíbrio instável B . Neste ponto, a variação da energia potencial total pode ser negativa ou positiva conforme o deslocamento se dê para a esquerda ou direita. Independente disso, o corpo assumirá uma nova configuração de equilíbrio. Em face de tais observações pode-se traçar o seguinte paralelo entre a energia potencial e o tipo de equilíbrio correspondente. Para que se tenha o equilíbrio estável, é essencial que a energia potencial seja pelo menos um Mínimo relativo, isto é, para pequenas perturbações nos deslocamentos, deve-se ter um acréscimo da energia, como nos pontos A e B . O mesmo fenômeno pode ser observado quando se trata de um sistema estrutural. Obtendo-se a energia potencial total em função de coordenadas generalizadas independentes Δ_i ¹⁷, a configuração de equilíbrio deverá corresponder matematicamente,

¹⁷Como será visto em seguida utiliza-se os parâmetros Δ_i , que definem o deslocamento em cada ponto do corpo deformável, como coordenada generalizada.

de acordo com a expressão (1.55) a:

$$\frac{d\Pi}{d\Delta_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (1.56)$$

onde n_g é o número total de coordenadas generalizadas

Para se verificar a condição de Mínimo relativo da energia potencial total, é necessário obter-se informações das derivadas segundas. Obtendo-se uma matriz *Hessiana positiva definida*, tal condição é assegurada. Portanto, na configuração de equilíbrio estável, deve-se satisfazer, as seguintes expressões:

$$\frac{d\Pi}{d\Delta_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \right] \text{ ser positiva definida.} \quad (1.57)$$

Esta conclusão encontra-se enunciada através do **Princípio da Energia Potencial Total Mínima**:

“De todos os deslocamentos que satisfazem às condições de contorno de um sistema estrutural, aqueles correspondentes às configurações de equilíbrio estável fazem da energia potencial total um Mínimo relativo”.

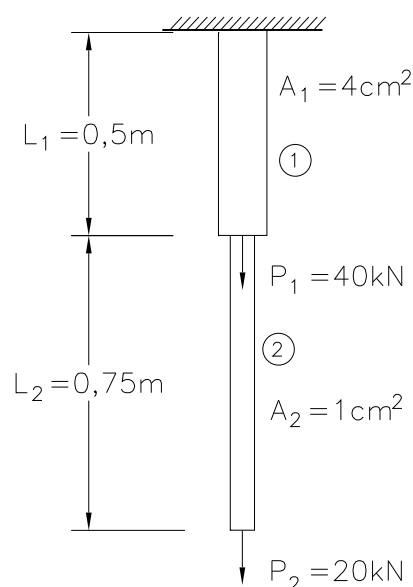


Figura 1.14: Sistema de barra sujeita a carregamentos verticais concentrados

■ **Exemplo 1.5.3** Uma estrutura formada por duas barras verticais, (1) e (2), de comprimentos $L_1 = 0,5m$, $L_2 = 0,75m$ e área de seção transversal $A_1 = 4cm^2$ e $A_2 = 1cm^2$,

encontra-se ilustrada na figura (1.14). O material das barras é linearmente elástico e cada barra tem rigidez axial EA , sendo $E = 70 \cdot 10^3 \text{ MPa}$. Verifique para este problema os Princípios da energia potencial total estacionária e mínima.

Solução

Para que se possa verificar estes Princípios, deve-se primeiramente obter-se uma expressão que descreva a energia potencial total do sistema a partir da(s) coordenada(s) generalizada(s). Dessa maneira torna-se possível, derivando-se uma e duas vezes esta expressão em função de tal(is) coordenada(s), estabelecer, para a configuração de equilíbrio, as condições de estacionaridade e valor Mínimo para a energia potencial total. No presente caso serão coordenadas generalizadas os deslocamentos Δ_1 e Δ_2 , definidos nas extremidades das barras (1) e (2) respectivamente. Estes deslocamentos podem ser obtidos a partir das equações de equilíbrio e relações constitutivas do material, ou seja:

$$\Delta_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{60 \cdot 0,5}{70 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0,001071 \text{ m} \quad (1.58)$$

$$\Delta_2 = \frac{N_2 L_2}{E_2 A_2} + \Delta_1 = \frac{20 \cdot 0,75}{70 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-4}} + 0,001071 = 0,003214 \text{ m} \quad (1.59)$$

Na equação (1.51) a energia potencial total é concebida como a diferença entre a energia de deformação interna U e o trabalho externo W . Sendo assim:

Barra (1):

Da equação (1.34) obtém-se a energia de deformação interna:

$$U = \int_0^L \left\{ \frac{EA}{2} (\varepsilon_{xx})^2 \right\} dx = \int_0^{L_1} \left\{ \frac{EA_1}{2} \left(\frac{\Delta_1}{L_1} \right)^2 \right\} dx = \frac{EA_1 \Delta_1^2}{2L_1} \quad (1.60)$$

Já o trabalho externo pode ser definido como:

$$W_E = P_1 \cdot \Delta_1 \quad (1.61)$$

Barra (2)

Um detalhe importante deve ser ressaltado para a barra 2. Apesar do termo Δ_2 corresponder ao deslocamento em sua extremidade inferior, deve-se lembrar que na extremidade

superior está havendo também um deslocamento no valor de Δ_1 , que representa o movimento desta barra como um corpo rígido. Sendo assim, a deformação interna será:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{L_2}$$

Portanto

$$U = \int_0^{L_2} \left\{ \frac{EA_2}{2} \left(\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{L_2} \right)^2 \right\} dx = \frac{EA_2(\Delta_2 - \Delta_1)^2}{2L_2} \quad (1.62)$$

E o trabalho externo é definido como:

$$W_E = P_2 \cdot \Delta_2 \quad (1.63)$$

uma vez que o ponto de aplicação da carga P_2 desloca-se exatamente Δ_2 .

Somando-se os termos (1.60), (1.62) e (1.61) (1.63), e substituindo-os na equação (1.51), a expressão que define a energia potencial total pode ser escrita como:

$$\Pi = \frac{EA_1\Delta_1^2}{2L_1} + \frac{EA_2(\Delta_2 - \Delta_1)^2}{2L_2} - P_1 \cdot \Delta_1 - P_2 \cdot \Delta_2 \quad (1.64)$$

Que após a substituição dos dados numéricos torna-se:

$$\Pi = 28000 \times 10^3 \Delta_1^2 + \frac{14000 \times 10^3}{3} (\Delta_2 - \Delta_1)^2 - 40 \times 10^3 \Delta_1 - 20 \times 10^3 \Delta_2 \quad (1.65)$$

Para que a energia potencial total do sistema seja estacionária deve-se ter:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1} = 0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2} = 0 \quad (1.66)$$

Portanto, introduzindo-se nas equações acima a expressão (1.65), chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 56000\Delta_1 - \frac{28000}{3}(\Delta_2 - \Delta_1) = 40 \\ \frac{28000}{3}(\Delta_2 - \Delta_1) = 20 \end{cases} \quad (1.67)$$

Cuja solução fornece $\Delta_1 = 0,001071m$ e $\Delta_2 = 0,003214m$, os mesmos valores já obtidos através das expressões (1.58) e (1.59). Mostra-se, assim, que na configuração de equilíbrio

estático, onde os deslocamentos foram calculados a partir de (1.58) e (1.59), as expressões de (1.66) são verificadas, ou seja, a energia potencial total é estacionária.

Para que se possa avaliar se a energia potencial é também mínima é preciso que se calcule termos da sua segunda derivada com relação às coordenadas generalizadas. Caso seja uma condição de energia potencial mínima, as relações

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_1^2} > 0 \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_2^2} > 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_1 \partial \Delta_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_2 \partial \Delta_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_2^2} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{devem ser satisfeitas} \quad (1.68)$$

Sendo assim:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_1^2} = \frac{196000 \times 10^3}{3} > 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_2^2} = \frac{28000 \times 10^3}{3} > 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_1 \partial \Delta_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_2 \partial \Delta_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_2^2} \end{vmatrix} = \frac{10^3}{3} \begin{vmatrix} 196000 & -28000 \\ -28000 & 28000 \end{vmatrix} = 1568 \times 10^9 > 0$$

Note que a matriz $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_1 \partial \Delta_2}$ é positiva definida porque todos os seus menores principais são positivos.

Portanto, a expressão correspondente a energia potencial assume um valor Mínimo na configuração de equilíbrio estável, e os **Princípios da Energia Potencial Total Estacionária e Mínima são verificados.**

1.5.7 Primeiro Teorema de Castigliano

Considere novamente o corpo elástico deformável, mostrado na figura (1.12), de material homogêneo e isotrópico, no qual o campo de deslocamentos $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ encontra-se descrito em função dos deslocamentos Δ_i . Fazendo-se o mesmo para os campos de tensão e de deformação, pode-se admitir Δ_i como as coordenadas generalizadas do problema. A equação (1.51) torna-se, portanto:

$$\Pi(\Delta_i) = U - \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i \quad (1.69)$$

Aplicando-se o Princípio da energia potencial total mínima, expressão (1.57):

$$d\Pi = 0 = \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} d\Delta_1 + \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} d\Delta_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \Delta_n} d\Delta_n - P_1 d\Delta_1 - P_2 d\Delta_2 - \cdots - P_n d\Delta_n$$

Rearranjando-se obtém-se:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} - P_1 \right) d\Delta_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial \Delta_2} - P_2 \right) d\Delta_2 + \cdots + \left(\frac{\partial U}{\partial \Delta_n} - P_n \right) d\Delta_n = 0$$

Uma vez que Δ_i são coordenadas generalizadas independentes, a expressão acima será igual a zero somente se os termos entre parênteses se anularem independentemente. Portanto,

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} - P_i = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

ou ainda que:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i \tag{1.70}$$

Esta equação é a representação matemática do **Primeiro Teorema de Castigliano**¹⁸:

“Se a energia de deformação de um sistema estrutural é expressa através dos \mathbf{n} deslocamentos independentes, correspondentes a \mathbf{n} forças prescritas P_i , sua primeira derivada parcial com relação a qualquer um destes deslocamentos Δ_i em um ponto \mathbf{i} é igual à força P_i aplicada neste ponto e na direção Δ_i ”

Observe que, apesar da maioria das aplicações para o primeiro teorema de Castigliano limitarem-se a estruturas lineares, **análises de estruturas não-lineares são perfeitamente possíveis**, uma vez que sua formulação independe desta propriedade, bastando apenas que se esteja no regime elástico.

Para a aplicação em problemas de n graus de liberdade, o procedimento padrão consiste em expressar a energia de deformação através de n coordenadas generalizadas Δ_i , mesmo

¹⁸Apresentado primeiramente em 1873 por Alberto Castigliano - (1847-1884) - Engenheiro Civil pela “Polytechnic Institute of Turim”.

que este não seja o número de forças (e momentos) presentes. Derivando-se a expressão obtida com relação a cada uma das coordenadas e igualando-se o resultado à força (e momento) correspondente (zero no caso de não existir), chega-se a um sistema de equações de ordem n , que será linear ou não, dependendo do tipo de problema analisado. No caso de estruturas lineares o sistema adquire a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= k_{11}\Delta_1 + k_{12}\Delta_2 + \cdots + k_{1i}\Delta_i + \cdots + k_{1n}\Delta_n \\
 P_2 &= k_{21}\Delta_1 + k_{22}\Delta_2 + \cdots + k_{2i}\Delta_i + \cdots + k_{2n}\Delta_n \\
 \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 P_i &= k_{i1}\Delta_1 + k_{i2}\Delta_2 + \cdots + k_{ii}\Delta_i + \cdots + k_{in}\Delta_n \\
 \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 P_n &= k_{n1}\Delta_1 + k_{n2}\Delta_2 + \cdots + k_{ni}\Delta_i + \cdots + k_{nn}\Delta_n
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

Tal sistema apresenta como incógnitas cada um dos deslocamentos Δ_i e sua solução descreve o comportamento da estrutura. Este procedimento é definido como *Método da Rigidez*, e os termos k_{ij} são conhecidos como coeficientes de rigidez da estrutura. Na análise de estruturas não lineares não é possível isolar os deslocamentos Δ_i , e os coeficientes de rigidez não são constantes pois dependem de tais deslocamentos. Tem-se, então, o *Método dos Deslocamentos*, que pode ser entendido como uma formulação mais geral para o *Método da Rigidez*.

■ **Exemplo 1.5.4** *A treliça elástica, não-linear, ABC, com barras de seção transversal constante A, mostrada na figura (1.15(a)), suporta uma carga vertical, P, na rótula B. A lei constitutiva do material é descrita pela curva de tensão-deformação $\sigma = B\sqrt{\varepsilon}$, apresentada na figura (1.15(b)), onde B é constante e a relação é a mesma na tração e compressão. Calcule os deslocamentos do ponto B.*

Solução

O deslocamento na rótula B pode ser expresso pela combinação de suas componentes horizontal, Δ_1 , e vertical, Δ_2 . Assumindo tais grandezas como as coordenadas generalizadas do problema, pode-se expressar a energia de deformação em função destes, aplicando-se a seguir o Primeiro Teorema de Castigliano.

Na figura (1.15(c)) observa-se que devido, apenas, ao deslocamento Δ_1 , haverá um alongamento

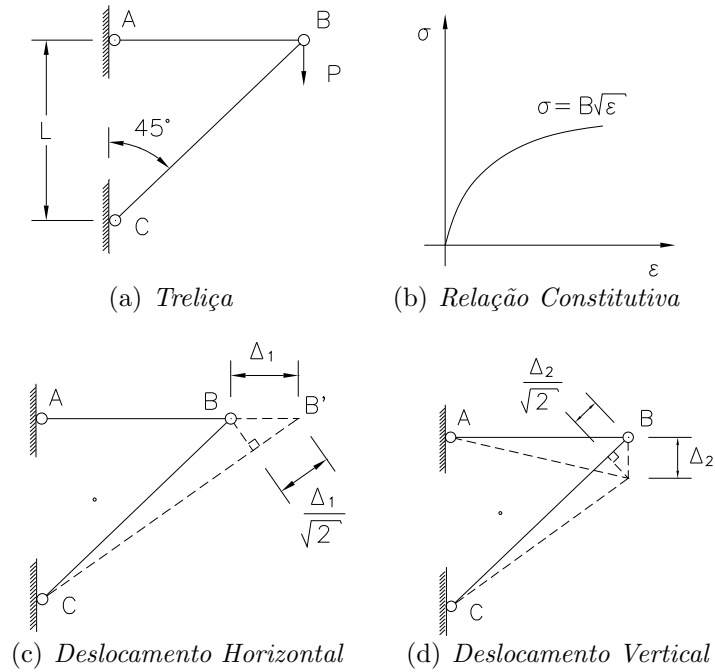


Figura 1.15: *Treliça constituída de material com curva de tensão-deformação não-linear*
gamento na barra AB neste mesmo valor, e um alongamento na barra BC igual a $\Delta_1/\sqrt{2}$.
Sendo assim, a deformação de cada barra, proveniente apenas do deslocamento Δ_1 deve
ser:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\Delta_1}{L} \tag{1.72}$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\Delta_1/\sqrt{2}}{L\sqrt{2}} = \frac{\Delta_1}{2L} \tag{1.73}$$

Do mesmo modo, na figura (1.15(d)) nota-se que devido, somente, ao deslocamento Δ_2 a
barra BC sofre um encurtamento $\Delta_2/\sqrt{2}$, enquanto o comprimento de AB não se altera,
uma vez que se tem como hipótese a teoria dos pequenos deslocamentos. A deformação
em cada barra, causada apenas pelo deslocamento Δ_2 é, portanto:

$$\varepsilon_{AB} = 0 \tag{1.74}$$

$$\varepsilon_{BC} = -\frac{\Delta_2}{2L} \tag{1.75}$$

Somando-se as expressões (1.72) e (1.74), (1.73) e (1.75), chega-se a uma expressão para

a deformação total de cada barra:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\Delta_1}{L} \quad \text{alongamento} \quad (1.76)$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2L} \quad \text{encurtamento} \quad (1.77)$$

Para o cálculo da densidade de energia de deformação utiliza-se a equação (1.16):

$$U_o^{AB} = \int_0^{\varepsilon_{AB}} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{AB}} B\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{2B}{3} \left(\frac{\Delta_1}{L} \right)^{3/2}$$

$$U_o^{BC} = \int_0^{\varepsilon_{BC}} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{BC}} B\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{2B}{3} \left(\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2L} \right)^{3/2}$$

Como o esforço normal em cada barra não varia ao longo de seu comprimento, o mesmo deverá ocorrer com a tensão e deformação. Desse modo, a densidade de energia de deformação será constante, bastando que seja multiplicada pelo respectivo volume para que se obtenha a energia de deformação para as duas barras. A treliça terá, portanto, uma energia de deformação total no valor de:

$$U = U_{AB} + U_{BC} = U_o^{AB} AL + U_o^{BC} AL\sqrt{2}$$

ou seja

$$U = \frac{AB}{3\sqrt{L^3}} \left[2\Delta_1^{3/2} + (\Delta_2 - \Delta_1)^{3/2} \right] \quad (1.78)$$

Chega-se assim, a uma expressão que define a energia de deformação da estrutura em função das coordenadas generalizadas Δ_1 e Δ_2 . Pode-se, então, aplicar o Primeiro Teorema de Castigliano, derivando-se (1.78) com relação aos deslocamentos. As expressões obtidas são igualadas às cargas presentes no ponto B na direção horizontal, $P_1 = 0$, e na vertical, $P_2 = P$.

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{AB}{2\sqrt{L}} \left[2\Delta_1^{1/2} - (\Delta_2 - \Delta_1)^{1/2} \right] = 0 \quad (1.79)$$

$$P_2 = \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \frac{AB}{2\sqrt{L}} \left[(\Delta_2 - \Delta_1)^{1/2} \right] = P$$

Resolvendo o sistema acima obtém-se, finalmente, os seguintes valores para os deslocamentos:

$$\Delta_1 = \frac{P^2L}{A^2B^2} \quad \Delta_2 = \frac{5P^2L}{A^2B^2} \quad (1.80)$$

Neste ponto alcança-se o objetivo definido no início do exemplo. Imagine agora que a relação constitutiva do material seja elástico-linear. Sendo assim, a densidade de energia de deformação passa a ser:

$$U_o^{AB} = \int_0^{\varepsilon_{AB}} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{AB}} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{E}{2} \left(\frac{\Delta_1}{L} \right)^2$$

$$U_o^{BC} = \int_0^{\varepsilon_{BC}} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{BC}} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{E}{2} \left(\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2L} \right)^2$$

E a energia total de deformação torna-se:

$$U = \frac{EA}{2L} \left[\Delta_1^2 + \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)^2}{2\sqrt{2}} \right] \quad (1.81)$$

A aplicação do Primeiro Teorema de Castigliano fornece:

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{EA}{2L} \left[2\Delta_1 - \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)}{\sqrt{2}} \right] = 0$$

$$P_2 = \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \frac{EA}{2L} \left[\frac{(\Delta_2 - \Delta_1)}{\sqrt{2}} \right] = P \quad (1.82)$$

Cuja solução é:

$$\Delta_1 = \frac{PL}{EA} \quad \Delta_2 = \frac{PL}{EA} (2\sqrt{2} + 1)$$

Observe que o sistema (1.82) é composto por equações lineares, para as quais os coeficientes de rigidez podem ser obtidos facilmente. A aplicação do Primeiro Teorema de Castigliano resulta portanto em uma análise através do método da rigidez. O mesmo não ocorre para o sistema (1.79), onde as equações são não lineares e por isso os coeficientes deixam de ser constantes e passam a ser funções das próprias coordenadas. Tem-se, então, o **método dos deslocamentos**.

1.5.8 Energia Potencial Complementar

As definições de energia potencial, energia de deformação e trabalho, equações (1.50-1.51), têm em comum uma formulação a partir dos deslocamentos (e rotações) e deformações. Paralelamente a este enfoque, o comportamento de um sistema estrutural pode também ser interpretado através das tensões e forças (e momentos) presentes. As grandezas obtidas dessa maneira são denominadas energia potencial complementar, energia de deformação complementar e trabalho complementar. Apesar de não possuírem um significado físico aparente, são importantes na análise de estruturas estaticamente indeterminadas através dos métodos de energia.

De maneira análoga a que foi utilizada na descrição do trabalho realizado pelas forças de superfície e de campo, o trabalho complementar pode ser definido como:

$$W_E^* = \int_V \left[\int_0^F (u dF_x + v dF_y + w dF_z) \right] dV + \int_{S_2} \left[\int_0^F (u dT_x + v dT_y + w dT_z) \right] dS \quad (1.83)$$

Neste caso, a integração é realizada a partir de um estado de tensão inicial I , a um final F , sendo S_2 correspondente ao trecho da superfície em que os deslocamentos estão prescritos.

Adotando-se as mesmas simplificações da seção (1.5.5), sendo Δ_i os deslocamentos (e rotações) prescritos em certos pontos do contorno (trecho S_2) e P_i as forças de reação desenvolvidas (a serem determinadas) chega-se a:

$$W_E^* = \sum_{i=1}^n \Delta_i P_i = -\Pi_F^* \quad (1.84)$$

onde Π_F^* representa a energia potencial complementar do sistema, já na configuração final F .

é importante caracterizar que no enfoque matemático atribuído ao procedimento da energia complementar, os deslocamentos são considerados entidades prescritas, ou seja, grandezas pré-estabelecidas. Por outro lado, as forças externas e tensões internas são consideradas variáveis e por isso tornam-se as coordenadas generalizadas do problema. Isto pode ser interpretado no exemplo da figura (1.16). Na figura (1.16(a)) uma força P é aplicada produzindo um deslocamento Δ . A energia potencial total e o trabalho realizado podem

então ser calculados como:

$$\Pi = -W = - \int_0^{\Delta} P d\Delta \quad (1.85)$$

Já na figura (1.16(b)), o deslocamento de magnitude Δ encontra-se prescrito e, portanto, uma força P se desenvolve para que tal deslocamento se mantenha. Para este fenômeno define-se a energia potencial e trabalho complementares como:

$$\Pi^* = -W^* = - \int_0^P \Delta dP \quad (1.86)$$

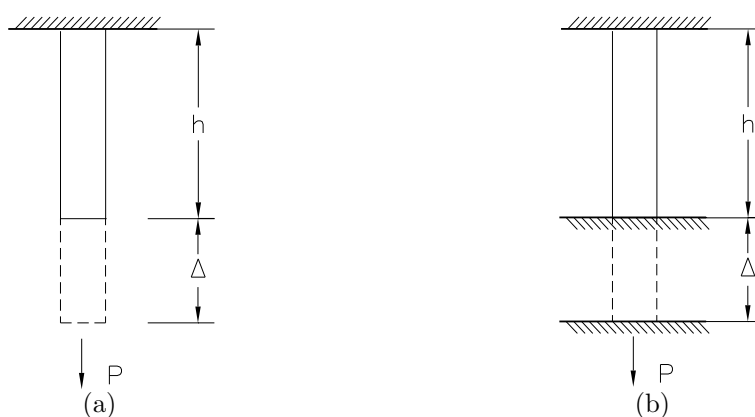


Figura 1.16: *Estado de Tensão Uni-axial*

Observe que para ambos os casos de deslocamento e carregamento prescrito, em sua configuração final, a mesma distribuição de tensões e deformações deverá ser obtida, uma vez que o comportamento da barra será idêntico. A única diferença encontra-se na maneira com que se interpreta a produção deste comportamento. Para o caso da figura (1.16(a)), a força é interpretada como uma grandeza prescrita ao passo que os deslocamentos são variáveis utilizadas como coordenadas generalizadas. Já para a barra da figura (1.16(b)), tais coordenadas passam a ser as forças, uma vez que são considerados prescritos os deslocamentos. Dentro deste enfoque, as forças externas aplicadas podem ser interpretadas como reações provenientes de apoios fictícios, introduzidos para manter o corpo em sua configuração deformada.

Neste mesmo raciocínio, a energia de deformação complementar de um sistema estrutural é obtida da seguinte maneira:

$$U^* = \int_V U_o^* dV \quad (1.87)$$

sendo U_o^* a energia de deformação complementar por unidade de volume:

$$U_o^* = \int_0^F (\varepsilon_{xx} d\sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} d\sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} d\sigma_{zz} + \gamma_{xy} d\sigma_{xy} + \gamma_{yz} d\sigma_{yz} + \gamma_{xz} d\sigma_{xz}) \quad (1.88)$$

Aqui também a integral é calculada de um estado de tensão inicial sem carregamento, I , ao estado final carregado F .

Finalmente, em analogia à equação (1.51), pode-se definir a energia potencial complementar total como:

$$\Pi^* = U^* + \Pi_F^* = U^* - W_E^* \quad (1.89)$$

e o **Princípio da Energia Potencial Complementar Estacionária** é, dessa maneira, estabelecido:

“De todas as tensões e forças (e momentos) que satisfazem às condições de equilíbrio de um sistema estrutural, aquelas correspondentes a um estado real e compatível de deformação fazem que a energia complementar assuma um valor estacionário.”

A energia potencial complementar para um sistema em equilíbrio, é estacionária, ou seja, assume valores Mínimos ou máximos relativos. é possível mostrar, seguindo o mesmo raciocínio empregado na seção (1.5.6), que, para configurações de equilíbrio estável a energia potencial complementar será um mínimo relativo. Define-se, desse modo, o **Princípio da Energia Potencial Complementar Mínima**:

“De todas as tensões e forças (e momentos) que satisfazem às condições de equilíbrio de um sistema estrutural, aquelas correspondentes a um estado real e compatível de deformação estável fazem com que a energia complementar assuma um valor mínimo relativo”.

Portanto, adotando-se as cargas P_i como coordenadas generalizadas, a formulação matemática correspondente ao Princípio da energia potencial complementar mínima pode ser estabelecida:

$$\frac{d\Pi^*}{dP_i} = 0; \quad \forall i = 1, \dots, n_p \quad (1.90)$$

$$\text{e } \left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial P_i \partial P_j} \right] \text{ é positiva definida} \quad (1.91)$$

onde, n_p é o número total de coordenadas generalizadas.

■ **Exemplo 1.5.5** *O mesmo problema analisado no exemplo (1.5.3) será empregado aqui para se verificar os Princípios da energia potencial complementar estacionária e mínima. O procedimento adotado será o mesmo e a diferença básica reside na utilização das cargas como coordenadas generalizadas e não mais os deslocamentos, pois deseja-se chegar em uma formulação de energia complementar.*

Solução

Para se obter a expressão que define a energia potencial complementar imagine, inicialmente, que se desconhece o valor das cargas P_1 e P_2 . Ao mesmo tempo considere os deslocamentos como grandezas conhecidas. Sendo assim, de acordo com as equações (1.58) e (1.59):

$$\Delta_1 = 0,001071m \quad \Delta_2 = 0,003214m$$

Uma vez que se trata de um sistema elástico-linear, a energia de deformação complementar, equação (1.35), é determinada como:

$$U^* = \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dx = \int_0^{L_1} \frac{(N_1)^2}{2EA_1} dx + \int_0^{L_2} \frac{(N_2)^2}{2EA_2} dx \quad (1.92)$$

Onde N_1 e N_2 são os esforços solicitantes ao longo de cada barra, obtidos a partir do equilíbrio de forças:

$$N_1 = P_1 + P_2 \quad N_2 = P_2 \quad (1.93)$$

Substituindo as equações acima em (1.92) chega-se à expressão final para a energia de deformação complementar:

$$U^* = \frac{1}{2E} \left[\frac{(P_1 + P_2)^2 L_1}{A_1} + \frac{(P_2)^2 L_2}{A_2} \right] \quad (1.94)$$

Já o trabalho externo complementar pode ser determinado diretamente como:

$$W_E^* = P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2 \quad (1.95)$$

Introduzindo nas equações (1.94) e (1.95) os valores numéricos correspondentes e substituindo-as em (1.89), obtém-se a expressão para a energia potencial complementar em função das cargas:

$$\Pi^* = 8,9286 \cdot 10^{-6} P_1^2 + 6,2499 \cdot 10^{-5} P_2^2 + 1,7857 \cdot 10^{-5} P_1 P_2 - 0,00107 P_1 - 0,00321 P_2 \quad (1.96)$$

Para que a energia potencial complementar do sistema seja estacionária deve-se ter:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial P_1} = 0 \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial P_2} = 0 \quad (1.97)$$

ou seja, derivando-se a expressão (1.96) com relação às cargas, o seguinte sistema de equações deve ser verificado:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi^*}{\partial P_1} = 1,78572 \cdot 10^{-5} P_1 + 1,78572 \cdot 10^{-5} P_2 = 0,001071 \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial P_2} = 1,78572 \cdot 10^{-5} P_1 + 1,24992 \cdot 10^{-4} P_2 = 0,003214 \end{cases} \quad (1.98)$$

A solução deste sistema fornece $P_1 = 40kN$ e $P_2 = 20kN$, que são os mesmos valores correspondentes ao estado real e compatível de deformação estabelecido no enunciado do problema. As expressões de (1.97) são, então verificadas, o que significa que a energia potencial total é estacionária.

Para que se verifique se energia potencial complementar encontra-se em seu valor Mínimo, é preciso obter-se informações das segundas derivadas com relação às coordenadas generalizadas, de maneira que a matriz:

$$\left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial P_i \partial P_j} \right] \text{ seja positiva definida.} \quad (1.99)$$

Sendo assim:

$$\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial P_1^2} = 1,78572 \cdot 10^{-5} > 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial P_2^2} = 1,24992 \cdot 10^{-4} > 0$$

$$e \quad \begin{vmatrix} 1,78572 & 1,78572 \\ 1,78572 & 12.49992 \end{vmatrix} = 19,1326 > 0$$

Como todos os menores principais são positivos, fica assegurada a condição de a matriz $[\frac{\partial \Pi}{\partial P_i \partial P_j}]$ ser positiva definida.

Portanto, a expressão correspondente a energia potencial assume um valor Mínimo para o estado real e compatível de deformação, e os **Princípios da Energia Potencial Total Estacionária e Mínima** são verificados.

1.5.9 Primeiro Teorema de Engesser

O procedimento utilizado para se obter o Primeiro Teorema de Engesser baseia-se na energia e no trabalho complementar, apresentados na seção anterior. Para isso, considere, mais uma vez, o corpo deformável, de material isotrópico e homogêneo, para o qual as deformações devem ser pequenas e compatíveis, figura (1.12). Sobre um trecho de seu contorno, n deslocamentos compatíveis Δ_i , são prescritos, produzindo n reações independentes P_i (forças e momentos). Tais reações são adotadas como coordenadas generalizadas do sistema e em função delas descreve-se as demais variáveis. A energia potencial complementar da equação (1.89) pode ser, então, definida como:

$$\Pi^*(P_i) = U^* - \sum_{i=1}^n \Delta_i P_i \quad (1.100)$$

Aplicando-se o Princípio da energia complementar mínima, expressões (1.90), deve-se ter:

$$d\Pi^* = 0 = \frac{\partial U^*}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial U^*}{\partial P_2} dP_2 + \dots + \frac{\partial U^*}{\partial P_n} dP_n - \Delta_1 dP_1 - \Delta_2 dP_2 - \dots - \Delta_n dP_n$$

Rearranjando-se os termos, obtém-se:

$$\left(\frac{\partial U^*}{\partial P_1} - \Delta_1 \right) dP_1 + \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_2} - \Delta_2 \right) dP_2 + \dots + \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_n} - \Delta_n \right) dP_n = 0$$

Excetuando-se as condições de equilíbrio e a exigência de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, nenhuma outra restrição é imposta às variações dP_i , sendo assim arbitrárias. Isto significa que:

$$\frac{\partial U^*}{\partial P_i} - \Delta_i = 0 \quad \text{ou seja:} \quad \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \Delta_i \quad (1.101)$$

O **Primeiro Teorema de Engesser**¹⁹ pode, portanto, ser formulado:

“Se a energia de deformação complementar de um sistema estrutural, sujeito a pequenos deslocamentos, for expressa em função das n forças independentes e correspondentes a um conjunto de n deslocamentos prescritos Δ_i , sua primeira derivada parcial com relação às forças P_i em um ponto i é igual ao deslocamento Δ_i neste ponto e na direção de P_i ”.

É importante perceber que o Primeiro Teorema de Engesser pode ser aplicado para **sistemas fisicamente lineares e não lineares**, pois nenhuma restrição a este respeito é introduzida durante sua formulação. Basta apenas que o material esteja trabalhando no **regime elástico**. No entanto, a restrição de pequenos deslocamentos restringe sua aplicação a problemas geometricamente não lineares

■ **Exemplo 1.5.6** *Para ilustrar a aplicação do Primeiro Teorema de Engesser considere novamente a treliça do exemplo (1.5.4), para a qual pretende-se obter os deslocamentos da rótula B . Neste caso, as cargas passam a ser consideradas como as coordenadas generalizadas, tendo que se calcular a energia de deformação complementar.*

Solução

O primeiro passo para a solução do problema consiste na obtenção de uma expressão para a energia de deformação complementar em função das cargas presentes no ponto B . Como se deseja chegar aos deslocamentos horizontais e verticais, uma questão importante se apresenta. Para o caso do deslocamento vertical basta que se derive a energia complementar em função da carga $P_2 = P$. Já para o deslocamento horizontal não há carga atuando nesta direção e assim, torna-se inviável a aplicação do Primeiro Teorema de Engesser. Porém, um artifício pode ser utilizado. Adiciona-se uma carga fictícia P_1 na direção horizontal. Deriva-se, primeiramente, a energia complementar em relação a esta carga. E, finalmente, iguala-se o valor dessa carga fictícia P_1 a zero, na expressão da derivada para se obter o valor do deslocamento horizontal.

¹⁹Apresentado inicialmente em 1889 por Frederich Engesser - (1848 - 1931) - Engenheiro de Estradas de Ferro na Alemanha e Professor no “Karslsruhe Polytechnic Institute”.

A densidade de energia de deformação complementar, equação (1.18), pode ser escrita, para cada barra como:

$$(U_o^*)^{AB} = \int_0^{\sigma_{AB}} \varepsilon d\sigma = \int_0^{\sigma_{AB}} \frac{\sigma^2}{B^2} d\sigma = \frac{\sigma_{AB}^3}{3B^2}$$

$$(U_o^*)^{BC} = \int_0^{\sigma_{BC}} \varepsilon d\sigma = \int_0^{\sigma_{BC}} \frac{\sigma^2}{B^2} d\sigma = \frac{\sigma_{BC}^3}{3B^2}$$

Lembrando-se que a tensão permanece constante ao longo de cada barra, a energia de deformação complementar é obtida apenas multiplicando sua densidade pelo volume correspondente:

$$U^* = \frac{AL}{3B^2} \left(\sigma_{AB}^3 + \sqrt{2}\sigma_{BC}^3 \right) \quad (1.102)$$

A energia acima deve, no entanto, ser expressa em função das cargas, o que se consegue recorrendo-se ao equilíbrio no ponto B, que fornece:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{P_1 + P_2}{A} \quad (\text{tração})$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{\sqrt{2}P_2}{A} \quad (\text{compressão})$$

sendo N_{AB} e N_{BC} os esforços normais presentes nas barras AB e BC respectivamente. Dessa maneira a equação (1.102) torna-se:

$$U^* = \frac{L}{3B^2A^2} \left[(P_1 + P_2)^3 + \sqrt{2} \left(\sqrt{2}P_2 \right)^3 \right] = \frac{L}{3B^2A^2} \left[(P_1 + P_2)^3 + 4(P_2)^3 \right] \quad (1.103)$$

Aplicando-se o Primeiro Teorema de Engesser, e substituindo-se em seguida $P_1 = 0$ e $P_2 = P$:

$$\Delta_1 = \frac{\partial U^*}{\partial P_1} = \frac{L}{3B^2A^2} \left[3(P_1 + P_2)^2 \right] = \frac{P^2L}{B^2A^2} \quad (1.104)$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial U^*}{\partial P_2} = \frac{L}{3B^2A^2} \left[3(P_1 + P_2)^2 + 12(P_2)^2 \right] = \frac{5P^2L}{B^2A^2}$$

1.5.10 Segundo Teorema de Castigliano

Como mostrado na seção anterior, o Primeiro Teorema de Engesser pode ser aplicado para sistemas elásticos lineares ou não. Para o **caso particular de linearidade elástica** sabe-se que a energia complementar equivale à energia de deformação interna, ou seja:

$$U^* = U$$

o que faz com que a equação (1.101) possa ser escrita como:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i \quad (1.105)$$

estando U descrito em função das coordenadas generalizadas P_i .

Tal formulação, que representa apenas um caso particular do Primeiro Teorema de Engesser, é conhecida como o **Segundo Teorema de Castigliano**.

■ **Exemplo 1.5.7** *Considere, como foi feito no exemplo (1.5.4), que a treliça seja constituída de um material que obedeça a Lei de Hooke. Tem-se, assim, o caso particular de linearidade elástica, o que permite que se utilize do Segundo Teorema de Castigliano para se obter os deslocamentos na rótula B.*

Solução

Para que a aplicação do Segundo Teorema de Castigliano seja possível, o primeiro passo é a obtenção da energia de deformação, mas agora em função das cargas.

A densidade de energia de deformação, em cada barra, sendo o material elástico-linear, pode ser obtida a partir da equação (1.25):

$$U_o^{AB} = \frac{E}{2} \varepsilon_{AB}^2 \quad U_o^{BC} = \frac{E}{2} \varepsilon_{BC}^2 \quad (1.106)$$

Uma vez que, pelas relações constitutivas:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E} = \frac{P_1 + P_2}{AE} \quad \varepsilon_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{E} = \frac{\sqrt{2}P_2}{AE}$$

Chega-se à expressão correspondente à energia de deformação multiplicando pelo volume das barras as densidades de energia calculadas em (1.106) e substituindo as deformações definidas acima.

$$U = \frac{L}{2EA} \left[(P_1 + P_2)^2 + 2\sqrt{2} (P_2)^2 \right]$$

Lembre-se que sendo o material elástico-linear, as energias de deformação e complementar se confundem.

Aplicando-se o Segundo Teorema de Castigliano e fazendo $P_1 = 0$ e $P_2 = P$ obtém-se os valores para os deslocamentos em B:

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{L}{2EA} [2(P_1 + P_2)] = \frac{PL}{EA} \quad (1.107)$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{L}{2EA} [2(P_1 + P_2) + 4\sqrt{2}(P_2)] = \frac{PL}{EA} (2\sqrt{2} + 1)$$

Observe que a aplicação do Segundo Teorema de Castigliano somente foi possível porque se tratava de um sistema elástico-linear. Caso o mesmo procedimento fosse adotado para uma relação constitutiva não linear, figura (1.15(b)), os seguintes resultados seriam obtidos:

Sendo as densidades de energia de deformação em cada barra iguais a:

$$U_o^{AB} = \frac{2B}{3} (\varepsilon_{AB})^{3/2} = \frac{2B}{3} \left(\frac{\sigma_{AB}^2}{B^2} \right)^{3/2} = \frac{2}{3B^2} (\sigma_{AB})^3$$

$$U_o^{BC} = \frac{2B}{3} (\varepsilon_{BC})^{3/2} = \frac{2B}{3} \left(\frac{\sigma_{BC}^2}{B^2} \right)^{3/2} = \frac{2}{3B^2} (\sigma_{BC})^3$$

a energia de deformação total seria:

$$U = \frac{2}{3B^2} \left[(\sigma_{AB})^3 AL + (\sigma_{BC})^3 A\sqrt{2}L \right] = \frac{2L}{3A^2B^2} \left[(P_1 + P_2)^3 + 4(P_2)^3 \right]$$

Aplicando-se o Segundo Teorema de Castigliano, para $P_1 = 0$ e $P_2 = P$:

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{2L}{3A^2B^2} [3(P_1 + P_2)^2] = \frac{2P^2L}{A^2B^2} \quad (1.108)$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{2}{3A^2B^2} [3(P_1 + P_2)^2 + 12(P_2)^3] = \frac{10P^2L}{A^2B^2}$$

Os resultados acima obtidos para os deslocamentos não conferem com os calculados em (1.80). Este fato já era esperado pois resulta de uma aplicação **incorreta** do Segundo Teorema de Castigliano para o caso de **estruturas não lineares**

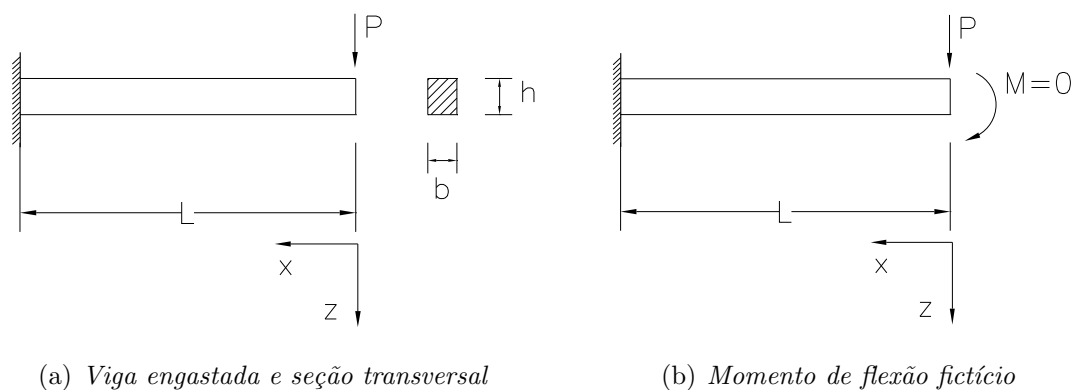


Figura 1.17: *Viga engastada com carga na extremidade*

■ **Exemplo 1.5.8** Na figura (1.17) encontra-se representada uma viga engastada, de material elástico-linear, com uma carga concentrada, P , em sua extremidade. Sabe-se, ainda, que apresenta seção transversal retangular constante, com dimensões b e h , que seu comprimento vale L e que o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são respectivamente E e ν . Calcule o deslocamento vertical e a rotação na extremidade da viga, considerando:

- Apenas o efeito proveniente da flexão.
- Apenas o efeito proveniente do cisalhamento.
- Compare os resultados obtidos entre os casos (a) e (b).

Solução

Neste exemplo, procura-se comparar a influência dos esforços de flexão (momento) e dos esforços cortantes no deslocamento e na rotação da extremidade da viga em balanço. Como properto no enunciado do problema, a estrutura a ser analisada trata-se de um sistema elástico linear. Dessa maneira, para se obter o deslocamento e a rotação utiliza-se o Primeiro Teorema de Engesser que nesse caso se confunde com o Segundo Teorema

de Castigliano. O procedimento de cálculo é, portanto, o mesmo utilizado no exemplo anterior.

Antes de se calcular a energia de deformação deve-se lembrar que se deseja obter não somente o deslocamento vertical, mas também a rotação na extremidade da viga. Sendo assim, torna-se necessário introduzir um momento de flexão fictício neste ponto, como mostra a figura (1.17b). Assim, o Segundo Teorema de Castigliano fornecerá não apenas a flecha como também o giro da extremidade da viga. Naturalmente, após a aplicação do teorema deverá ser atribuído o valor zero para o momento pois sua presença é apenas um artifício para se obter expressões que possibilitam a determinação da rotação na extremidade. Desse modo, para uma viga engastada, com uma carga concentrada, P , e um momento de flexão fictício, M , em sua extremidade, figura (1.17b), os seguintes esforços solicitantes estarão presentes ao longo do comprimento:

$$M_y = Px + M \quad V_{xz} = P \quad (1.109)$$

a. Considerando apenas o efeito da flexão, a energia de deformação complementar, equação (1.43), será:

$$U^* = \int_0^L \frac{(Px + M)^2}{2EI} dx$$

onde I é o momento de inércia I_{yy} da seção transversal.

Aplicando-se o Segundo Teorema de Castigliano, uma vez que se trata de um sistema elástico-linear, $U = U^*$, obtém-se:

$$\Delta_F = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\int_0^L \frac{(Px + M)^2}{2EI} dx \right] = \frac{PL^3}{3EI} \quad (\text{para baixo}) \quad (1.110)$$

$$\Theta_F = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M} \left[\int_0^L \frac{(Px + M)^2}{2EI} dx \right] = \frac{PL^2}{2EI} \quad (\text{sentido horário}) \quad (1.111)$$

Observe que somente após a derivação é que se atribui o valor zero ao momento M . Já o sentido dos deslocamentos é definido conforme a orientação do esforço aplicado. Assim, tanto o deslocamento vertical como a rotação, estarão orientados no mesmo sentido dos esforços P e M , respectivamente, se forem obtidos valores positivos para os mesmos.

b. Considerando, agora, apenas o efeito do cisalhamento, a energia de deformação complementar, equação (1.43), será:

$$U^* = \int_0^L \frac{\chi_z (P)^2 (1 + \nu)}{EA} dx$$

onde A é a área da seção transversal e χ_z o fator de forma que para a seção retangular vale $6/5$, tabela (1.1).

A aplicação do Segundo Teorema de Castigliano fornece, então, para os valores procurados:

$$\Delta_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\int_0^L \frac{\chi_z (P)^2 (1 + \nu)}{EA} dx \right] = \frac{12PL}{4EA} (1 + \nu) \quad \text{para baixo} \quad (1.112)$$

$$\Theta_C = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M} \left[\int_0^L \frac{\chi_z (P)^2 (1 + \nu)}{EA} dx \right] = 0 \quad (1.113)$$

c. Discute-se, agora, a influência da flexão e do cisalhamento no deslocamento vertical e na rotação da extremidade da viga. Considere, inicialmente, a influência sobre a rotação. Através do resultado obtido na letra (b), (1.113), nota-se que a rotação não recebe qualquer contribuição do efeito de cisalhamento. Basta, portanto, que se considere, apenas, os efeitos da flexão, (1.111). Quanto ao deslocamento vertical, deve-se analisar, inicialmente, as relações geométricas da estrutura, antes de qualquer conclusão. Sendo assim, lembrando que para o problema em questão, $I = bh^3/12$ e $A = bh$, a razão entre as soluções obtidas nas letras (a) e (b), expressões (1.110) e (1.112), é a seguinte:

$$\frac{\Delta_F}{\Delta_C} = \frac{\frac{PL^3}{3E \frac{bh^3}{12}}}{\frac{12PL}{4Ebh} (1 + \nu)} = \frac{5}{3(1 + \nu)} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \quad (1.114)$$

A expressão acima sinaliza que a razão entre as contribuições para o deslocamento vertical devido à flexão e ao cisalhamento varia conforme a relação entre o comprimento do vão, L , e a altura da seção transversal, h . Este comportamento pode ser observado na tabela (1.2), para a qual foi assumido $\nu = 0.3$.

Observa-se então, através da tabela (1.2), que o aumento na relação L/h , implica em um acréscimo muito maior na razão Δ_F/Δ_C . Isto significa que quanto mais

| L/h | Δ_F/Δ_C |
|-------|---------------------|
| 5 | $3,205 \cdot 10^1$ |
| 10 | $1,282 \cdot 10^2$ |
| 100 | $1,282 \cdot 10^4$ |
| 1000 | $1,282 \cdot 10^6$ |

Tabela 1.2: *Influência da geometria no cálculo de Δ*

esbelta for a viga, menor será a contribuição do cisalhamento para o valor final do deslocamento vertical. Explica-se, portanto, porque na maioria das vezes despreza-se o efeito do cisalhamento para o cálculo dos deslocamentos (flechas e rotações). O cálculo fica mais simples, pois apenas a flexão é considerada e a solução praticamente não perde em precisão para $(l/h) \geq 10$.

1.5.11 Os Teoremas da Reciprocidade de Rayleigh-Betti e de Maxwell

Em um corpo deformável, de material elástico linear (que obedece a lei de Hooke), o deslocamento (ou rotação) Δ_i , na posição i e direção n_r correspondente à direção de uma carga P_r , proveniente de um carregamento constituído por forças (e momentos), $P_1 \cdots P_n$, pode ser expresso como:

$$(\Delta_i)_{n_r} = \delta_{i1}P_1 + \delta_{i2}P_2 + \cdots + \delta_{ij}P_j + \cdots + \delta_{in}P_n \quad (1.115)$$

sendo que δ_{ik} é o deslocamento (ou rotação) na posição i e direção n_r , devido à aplicação de uma força (ou momento) unitário P_k . Deve-se ressaltar que a expressão acima é obtida aplicando-se o Princípio da superposição dos efeitos para os deslocamentos e por isso somente é válida para o caso de estruturas de comportamento linear. De maneira análoga, para uma posição j , e direção n_t correspondente à direção de uma carga P_i :

$$(\Delta_j)_{n_t} = \delta_{j1}P_1 + \delta_{j2}P_2 + \cdots + \delta_{ji}P_i + \cdots + \delta_{jn}P_n \quad (1.116)$$

Pelo segundo teorema de Castigliano, expressão (1.105), sendo P_i e P_j forças (ou momentos) aplicados nas direções n_i e n_j , respectivamente, sabe-se que:

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad \Delta_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \quad (1.117)$$

Derivando-se as equações acima em relação a P_j e P_i , após introduzir as expressões (1.115) e (1.116), chega-se a:

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_j} = \delta_{ij} \quad (1.118)$$

$$\frac{\partial \Delta_j}{\partial P_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial P_j \partial P_i} = \delta_{ji} \quad (1.119)$$

Estas duas expressões são portanto equivalentes e por isso deve-se ter:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (1.120)$$

Considere agora a figura (1.18(a)), na qual cada um dos dois sistemas de carregamento é reduzido a uma força de mesma magnitude P . No primeiro sistema, a carga (ou momento) P está aplicada em um ponto i e na direção n_r provocando o deslocamento (ou rotação) $(\Delta_{ji})_{n_t}$ em um ponto j na direção n_t . No segundo sistema, P encontra-se aplicada no ponto j , na direção n_t e produz $(\Delta_{ij})_{n_r}$ no ponto i e na direção n_r . Ambos os deslocamentos podem ser obtidos multiplicando-se os valores correspondentes às cargas unitárias, δ_{ij} e δ_{ji} , pelas cargas reais que lhe dão origem, ou seja:

$$\begin{aligned} (\Delta_{ij})_{n_r} &= \delta_{ij} P \\ (\Delta_{ji})_{n_t} &= \delta_{ij} P \end{aligned} \quad (1.121)$$

Uma vez que as cargas têm a mesma magnitude e aplicando-se a igualdade (1.120) pode-se afirmar que:

$$(\Delta_{ij})_{n_r} = (\Delta_{ji})_{n_t} \quad (1.122)$$

Esta identidade representa o **Teorema da Reciprocidade de Maxwell²⁰ ou dos Deslocamentos Recíprocos:**

²⁰James Clerk Maxwell - (1831-1879): Matemático e físico Inglês.

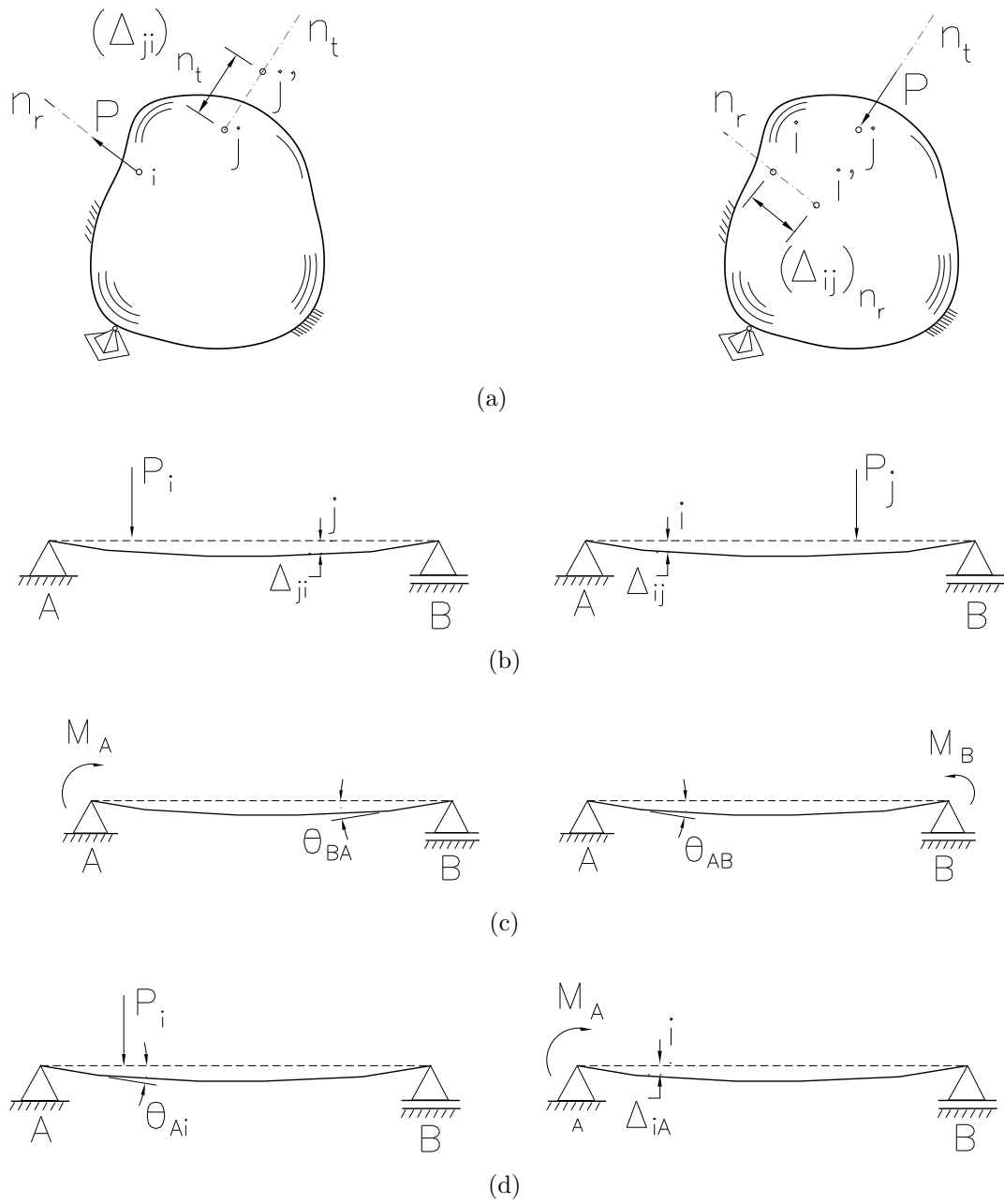


Figura 1.18: Ilustração para o Teorema dos Deslocamentos Recíprocos

“Para um corpo elástico linear, o deslocamento (ou rotação) de um ponto \mathbf{i} na direção n_r devido a uma força (ou momento) \mathbf{P} aplicada no ponto \mathbf{j} na direção n_t é igual ao deslocamento (ou rotação) do ponto \mathbf{j} na direção n_t proveniente de uma força \mathbf{P} (ou momento) que atua em um ponto \mathbf{i} e direção n_r .”

Nas figuras (1.18(b), 1.18(c) e 1.18(d)) encontram-se exemplos de aplicação deste teorema. Para estes casos deve-se ter:

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} \qquad \theta_{AB} = \theta_{BA} \qquad \theta_{Ai} = \Delta_{iA}$$

Observe que, na situação mostrada na figura (1.18(d)), o momento M_A possui o mesmo valor numérico da força P , mantendo, porém, as unidades correspondentes. Conseqüentemente, o termo Δ_{iA} deverá ser interpretado como deslocamento por unidade de comprimento

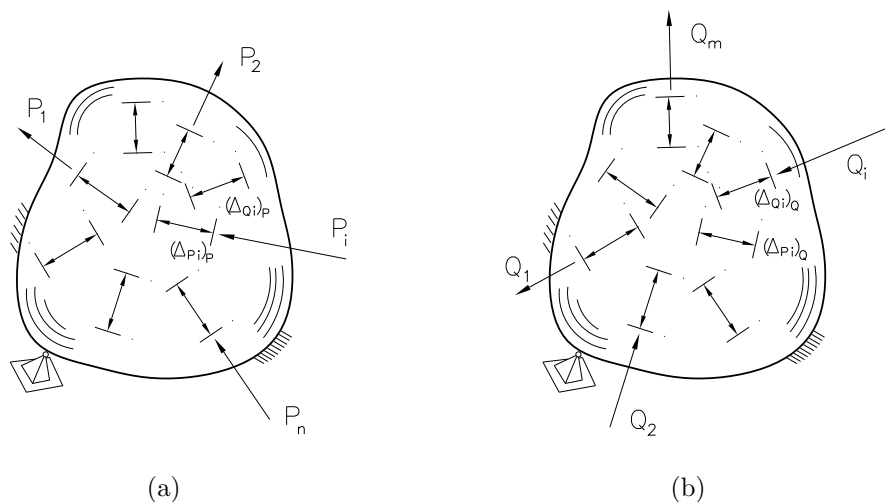


Figura 1.19: Ilustração para o Teorema dos Trabalhos recíprocos

O teorema de Maxwell é um caso particular do teorema de Rayleigh-Betti. O teorema de Rayleigh-Betti pode ser obtido considerando novamente um corpo deformável elástico linear submetido a dois carregamentos independentes, denominados P e Q , mostrados nas figuras (1.19(a) e 1.19(b)). Seja também $(\Delta_{X_i})_Y$ o deslocamento (ou rotação) no ponto de aplicação e direção da carga (ou momento) X_i devido ao carregamento Y , onde X

e Y podem representar os carregamentos P e (ou) Q . A energia de deformação para o carregamento P pode ser escrita como:

$$U_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i (\Delta_{P_i})_P \quad (1.123)$$

De maneira análoga, a energia de deformação correspondente à aplicação do segundo carregamento Q é a seguinte:

$$U_Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m Q_i (\Delta_{Q_i})_Q \quad (1.124)$$

Para investigar a energia de deformação do corpo sob a ação combinada dos dois carregamentos, diversos procedimentos podem ser seguidos. Como se trata de um sistema linear, sabe-se que a ordem de aplicação das cargas não importa sendo por isso válido o princípio da superposição. Considere, então, que as cargas Q_i sejam aplicadas logo após o carregamento P . Neste caso a energia de deformação será a soma de três parcelas. O primeiro carregamento produzirá sobre os deslocamentos correspondentes a energia U_P . Com a aplicação do segundo carregamento haverá um acréscimo nos deslocamentos. Sobre estes deslocamentos, porém, as cargas Q_i foram aplicadas de maneira gradativa resultando em U_Q . Já as cargas P_i permanecem constantes à medida que são produzidos os acréscimos nos deslocamentos provenientes de Q . A contribuição de energia correspondente é, portanto:

$$U_{P,Q} = \sum_{i=1}^n P_i (\Delta_{P_i})_Q \quad (1.125)$$

A energia de deformação pode ser, então, expressa como:

$$U = U_P + U_{P,Q} + U_Q \quad (1.126)$$

Adotando-se o mesmo procedimento para a ordem inversa de carregamento, uma nova expressão para a energia de deformação é obtida:

$$U = U_Q + U_{Q,P} + U_P \quad (1.127)$$

onde $U_{Q,P}$ corresponde à parcela de energia produzida pelas cargas Q_i já presentes, sobre os deslocamentos $(\Delta_{Q_i})_P$ provenientes do carregamento P :

$$U_{Q,P} = \sum_{i=1}^m Q_i (\Delta_{Q_i})_P \quad (1.128)$$

Conforme o Princípio da superposição as expressões (1.126 e 1.127) devem ser iguais e por isso:

$$U_{P,Q} = U_{Q,P} \tag{1.129}$$

ou seja:

$$\sum_{i=1}^n P_i(\Delta_{P_i})_Q = \sum_{i=1}^m Q_i(\Delta_{Q_i})_P \tag{1.130}$$

Observando que os termos da igualdade acima determinam o trabalho realizado por um carregamento sobre os deslocamentos de um outro carregamento, chega-se ao **Teorema de Rayleigh²¹-Betti²² ou dos Trabalhos recíprocos**, enunciado como se segue:

“Se um corpo elástico linear está submetido a dois sistemas de carregamento distintos, o trabalho realizado pelo primeiro sistema de carregamento sobre os deslocamentos produzidos pelo segundo sistema, é igual ao trabalho realizado pelo segundo sistema de carregamento sobre os deslocamentos provenientes do primeiro sistema de carregamento”.

Observe que a utilização da lei generalizada de Hooke limita a aplicação do teorema enunciado a sistemas lineares no regime elástico.

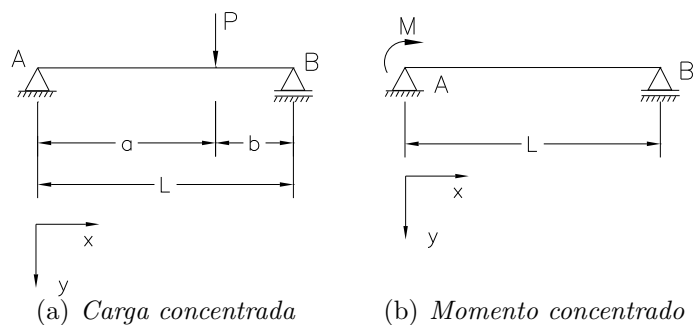


Figura 1.20: Vigas bi-apoiadas

²¹Lord Rayleigh - (1842 - 1919) físico Britânico.

²²Enrico Betti - (1823-1892) Engenheiro e Matemático Italiano.

■ **Exemplo 1.5.9** Em uma viga bi-apoiada, de material elástico-linear, sujeita à aplicação de uma carga vertical, P concentrada, figura (1.20(a)), a deflexão v , orientada no sentido de y , é descrita ao longo do vão, x , como:

$$v = \frac{Pbx}{6LEI} (L^2 - b^2 - x^2) \text{ Para } 0 \leq x \leq a \quad (1.131)$$

Já para a mesma viga sujeita a um momento concentrado, M , no apoio, figura (1.20(b)), apresenta a deflexão v , definida como:

$$v = \frac{Mx}{6LEI} (2L^2 - 3Lx + x^2) \quad (1.132)$$

onde E é o módulo de elasticidade e I o momento de inércia da seção transversal com relação ao eixo z , I_{zz} .

Conhecendo a deflexão para estes dois casos, e sabendo-se que a rigidez da estrutura $EI = 16800 \text{ kN} \cdot \text{m}^4/\text{m}^2$, verifique o Teorema de Maxwell, para as vigas da figura (1.21).

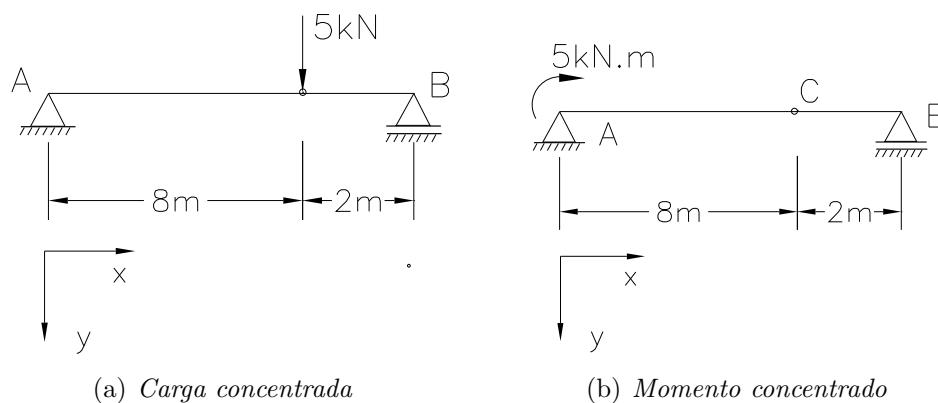


Figura 1.21: Vigas bi-apoiadas

Solução

Para que se verifique o Teorema de Maxwell é necessário que se demonstre que o deslocamento no ponto C , na figura (1.21(b)), seja equivalente à rotação no ponto A , na figura (1.21(a)). Dessa maneira, o primeiro passo é o de se calcular tais valores, mantendo-se, sempre, a consistência entre as unidades.

O deslocamento no ponto C devido a aplicação do momento em A pode ser obtido diretamente aplicando-se a equação (1.132), para $x = 8m$:

$$\Delta_{CA} = v = \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 10 \cdot 16800} (2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 \cdot 8 + 8^2) = 9,5238 \cdot 10^{-4} m \quad (1.133)$$

Já para o cálculo da rotação no ponto A proveniente da carga aplicada em C é necessário, primeiramente, definir a inclinação em função de x . Derivando-se, então, a expressão (1.131), calculando-se em seguida seu valor numérico em $x = 0$:

$$\Theta_{AC} = \frac{dv}{dx} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 10 \cdot 16800} (10^2 - 2^2 - 3 \cdot 0^2) = 9,5238 \cdot 10^4 \text{ rad} \quad (1.134)$$

Verifica-se, assim, o Teorema de Maxwell ou dos Deslocamentos Recíprocos, uma vez que os valores de (1.133) e de (1.134) são equivalentes.

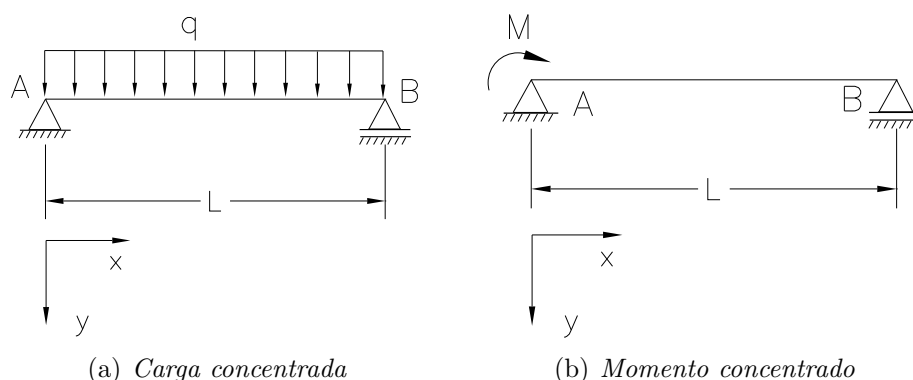


Figura 1.22: Vigas bi-apoiadas

■ **Exemplo 1.5.10** Para a viga bi-apoiada, de material elástico-linear, sujeita a aplicação de uma carga vertical uniformemente distribuída, q , figura (1.22(a)), a deflexão v , pode ser descrita como:

$$v = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3) \quad (1.135)$$

Já para o caso de um momento concentrado, M , no apoio, figura (1.22(b)), a deflexão v deverá ser:

$$v = \frac{Mx}{6LEI} (2L^2 - 3Lx + x^2) \quad (1.136)$$

A partir das expressões acima, e sabendo que a rigidez à flexão permanece a mesma, $EI = 16800kN \cdot m^4/m^2$, verifique o Teorema de Rayleigh-Betti.

Solução

A verificação do Teorema de Rayleigh-Betti implica na demonstração de que o trabalho realizado pela carga q , da figura (1.22(a)), sobre os deslocamentos produzidos pelo momento M , da figura (1.22(b)), seja igual ao trabalho realizado pelo momento M sobre a rotação produzida pela carga q no apoio A .

Para o cálculo do trabalho realizado pelo momento M , deve-se obter, inicialmente, a rotação no apoio A , proveniente da carga q . Como se conhece somente a expressão da deflexão, (1.135), deriva-se esta com relação a x , substituindo em seguida o valor $x = 0$, correspondente ao apoio A .

$$\Theta_{Aq} = \frac{q}{24EI} (L^3 - 6L \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^3) = \frac{qL^3}{24EI}$$

O trabalho realizado pelo momento será, portanto:

$$W_{Mq} = M\Theta_{Aq} = \left(\frac{MqL^3}{24EI} \right) \quad (1.137)$$

Observe que o trabalho W_{Mq} aparece com o sinal positivo. Isso está consistente com o fato de o momento M estar aplicado no mesmo sentido da rotação Θ_{Aq} .

Já, para se obter o trabalho realizado pela carga q sobre os deslocamentos produzidos pelo momento M , o procedimento é um pouco diferente do anterior. Uma vez que a carga q distribui-se ao longo de todo vão de maneira contínua, deve-se definir, primeiramente, o trabalho infinitesimal:

$$dW_{qM} = q \left[\frac{Mx}{6LEI} (2L^2 - 3Lx + x^2) \right] dx$$

O trabalho total, portanto, é obtido integrando-se o termo acima ao longo de todo o domínio:

$$W_{qM} = \int_0^L \left[\frac{qMx}{6LEI} (2L^2 - 3Lx + x^2) \right] dx = \left(\frac{qML^3}{24EI} \right) \quad (1.138)$$

As expressões (1.137) e (1.138) são idênticas, exemplificando, assim, o Teorema dos Trabalhos recíprocos, ou de Rayleigh-Betti.

1.5.12 Segundo Teorema de Engesser

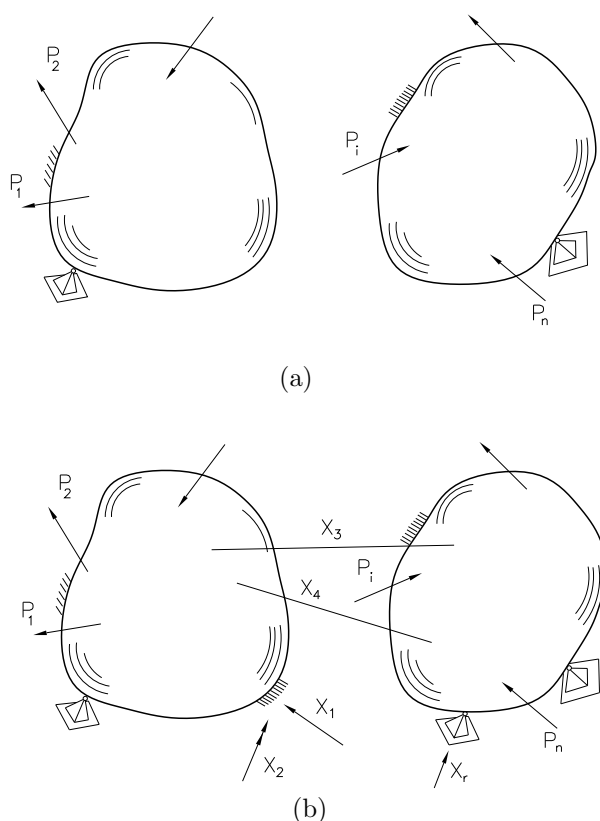


Figura 1.23: *Ilustração para o Segundo Teorema de Engesser*

Considere que os dois corpos deformáveis da figura (1.23(a)), submetidos ao carregamento P_i , formem um sistema em equilíbrio estável e estaticamente determinado²³. Nesse caso, pode-se obter a energia de deformação complementar, U^* , em função das forças (ou momentos) P_i . Para isso, basta substituir nas equações (1.87 e 1.88) os campos de tensão e de deformação em função do carregamento externo. Suponha, agora, a introdução de um número adicional de restrições externas (no contorno) e internas (vínculos entre ambos os corpos), de maneira que o sistema se torne estaticamente indeterminado. Sendo r o número total de restrições, terá surgido uma quantidade igual de forças (e momentos) X_i , denominadas **redundantes**. Os campos de tensões e deformações, e conseqüentemente a energia U^* , serão, portanto, função não apenas das cargas P_i mas também de tais redundantes X_i .

²³Um sistema é estaticamente determinado quando para se obter as reações de apoio bastam as equações de equilíbrio. Caso sejam ainda necessárias a utilização das relações constitutivas e a compatibilização da geometria trata-se, então, de um sistema estaticamente indeterminado.

Para o cálculo do trabalho complementar considere, inicialmente, que os deslocamentos prescritos nos pontos do contorno sejam nulos e que a posição relativa entre os dois corpos permaneça inalterada. Sendo assim, verifica-se que as forças redundantes não realizam trabalho complementar, uma vez que seus deslocamentos correspondentes são iguais a zero. Dessa maneira W_E^* permanece função apenas das cargas externas P_i e dos deslocamentos correspondentes Δ_i .

Para que o corpo analisado permaneça em equilíbrio estável, são possíveis vários sistemas auto-equilibrados de forças redundantes. Existe, todavia, apenas um sistema de forças que também satisfaz as condições de compatibilidade. Tal sistema de redundantes, conforme o Princípio da energia complementar estacionária, faz com que:

$$d\Pi^* = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial U^*}{\partial X_i} dX_i - \frac{\partial W_E^*}{\partial X_i} dX_i \right) = 0 \quad (1.139)$$

Sendo por hipótese W_E^* independente de X_i , sua derivada parcial com relação a X_i deverá ser zero e, portanto,

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_i} = 0 \quad (1.140)$$

ou seja, a energia de deformação complementar, U^* , assim como a energia potencial complementar assume um valor estacionário, que será um Mínimo, caso o sistema esteja em equilíbrio estável. Com base nestas conclusões, chega-se a um forma particular do **Segundo Teorema de Engesser** ou **Teorema do Trabalho Mínimo**:

“De todas os possíveis conjuntos de forças redundantes em um sistema estrutural estaticamente indeterminado, que satisfazem as condições de equilíbrio, aquele que também satisfizer as condições de compatibilidade fará com que a energia de deformação complementar seja um Mínimo, desde que os deslocamentos prescritos correspondentes às redundantes sejam nulos”.

Dentro deste contexto, suponha que no cálculo da energia U^* o efeito de alguma das r redundantes fosse omitido. Sendo assim, a equação (1.140) não retornaria zero, ou seja, as condições de compatibilidade não estariam satisfeitas e o valor U^* não seria um Mínimo. Conseqüentemente, os deslocamentos calculados ao final da análise estariam acima dos

verdadeiros, o que significaria que a flexibilidade do sistema estaria superestimada enquanto que sua rigidez estaria subestimada.

Para se obter a forma geral do Segundo Teorema de Engesser, considere o caso em que deslocamentos prescritos s_i , correspondentes às forças redundantes, não sejam necessariamente iguais a zero. O trabalho complementar será, então, também função de X_i :

$$W_E^* = \sum_{i=1}^r s_i X_i + \sum_{i=1}^n \Delta_i P_i \quad (1.141)$$

o que significa que $\frac{\partial W_E^*}{\partial X_i} = s_i$. Dessa maneira a equação (1.139) torna-se:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_i} = s_i \quad (1.142)$$

O **Segundo Teorema de Engesser** pode, então, ser formulado como:

“Se a energia de deformação complementar de um sistema estrutural estáticamente indeterminado, sujeito a pequenos deslocamentos, for expressa em função do carregamento e forças redundantes independentes, sua primeira derivada parcial com relação às redundantes X_i em um ponto \mathbf{i} é igual ao deslocamento prescrito s_i neste ponto e na direção de X_i ”.

Assim, como no Primeiro Teorema de Engesser, é possível aplicar o Segundo Teorema de Engesser a problemas com não linearidade física. A única restrição é de que o material se comporte no regime elástico.

Na análise de problemas com r redundantes adota-se um procedimento análogo ao utilizado para o Primeiro Teorema de Castigliano. Aqui, porém, as coordenadas generalizadas são as redundantes X_i , o que faz com que o sistema de equações a ser resolvido tenha a seguinte forma, para o caso de estruturas lineares:

$$\begin{aligned} s_1 &= f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + \cdots + f_{1i}X_i + \cdots + f_{1r}X_r \\ s_2 &= f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + \cdots + f_{2i}X_i + \cdots + f_{2r}X_r \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ s_i &= f_{i1}X_1 + f_{i2}X_2 + \cdots + f_{ii}X_i + \cdots + f_{ir}X_r \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ s_r &= f_{r1}X_1 + f_{r2}X_2 + \cdots + f_{ri}X_i + \cdots + f_{rr}X_r \end{aligned} \quad (1.143)$$

As incógnitas, são, neste caso as redundantes X_i e os termos f_{ij} são denominados de coeficientes de flexibilidade da estrutura. O procedimento assim descrito é conhecido como *Método da Flexibilidade*. Em se tratando de estruturas não lineares, os coeficientes de flexibilidade não são constantes e dependem das redundantes X_i . Nesse caso, o método assume uma forma mais geral, recebendo a denominação de *Método das Forças*.

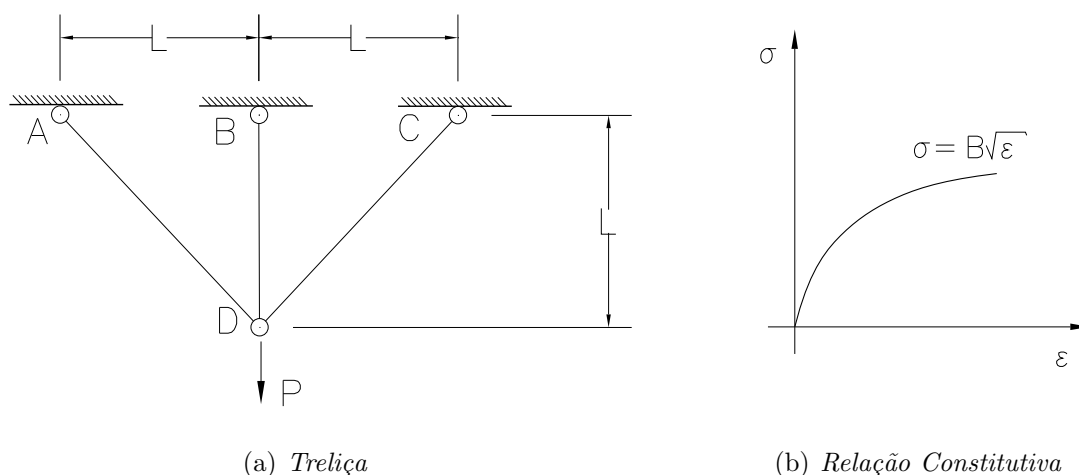


Figura 1.24: *Treliça constituída de material não-linear*

■ **Exemplo 1.5.11** *A treliça da figura (1.24(a)) é constituída por um material de relação tensão-deformação não-linear, dada pela equação $\sigma = B\sqrt{\varepsilon}$. Deseja-se calcular os esforços presentes nas barras AD, BD e CD, todas elas com seção transversal constante de área A.*

Solução

Uma vez que a treliça em estudo consiste em uma estrutura hiperestática (com um vínculo a mais), a utilização das equações de equilíbrio para a obtenção dos esforços normais que atuam em suas barras torna-se insuficiente, sendo, portanto, um sistema estaticamente indeterminado. Um dos caminhos possíveis seria a verificação da compatibilidade geométrica. Como, entretanto, o presente estudo abrange um enfoque de energia, tal problema será resolvido através da aplicação do Segundo Teorema de Engesser. Para isso deve-se escolher uma solicitação ou reação de apoio como a redundante independente. A energia de deformação complementar deverá ser derivada em relação a esta redundante independente, em conformidade com a equação (1.142).

Admitindo-se, então, a reação de apoio em B, como a redundante independente X, figura (1.25), obtém-se, para os esforços normais em cada barra, as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} N_{AD} = N_{CD} &= \frac{P - X}{\sqrt{2}} \quad (\text{tração}) \\ N_{BD} &= X \quad (\text{tração}) \end{aligned} \quad (1.144)$$

logo, as tensões correspondentes são:

$$\begin{aligned} \sigma_{AD} = \sigma_{CD} &= \frac{P - X}{\sqrt{2}A} \quad (\text{tração}) \\ \sigma_{BD} &= \frac{X}{A} \quad (\text{tração}) \end{aligned} \quad (1.145)$$

Repetindo-se os passos do exemplo (1.5.5), as densidades de energia de deformação complementar de cada barra, obtidas a partir da equação (1.18), podem ser expressas por:

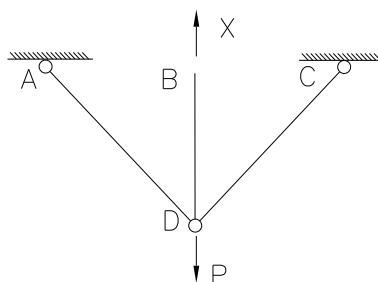


Figura 1.25: Reação de apoio em B como redundante independente

$$(U_o^*)^{AD} = \frac{\sigma_{AD}^3}{3B} = \left(\frac{P - X}{\sqrt{2}A} \right)^3 \frac{1}{3B^2}$$

$$(U_o^*)^{BD} = \frac{\sigma_{BD}^3}{3B} = \left(\frac{X}{A} \right)^3 \frac{1}{3B^2}$$

$$(U_o^*)^{CD} = \frac{\sigma_{CD}^3}{3B} = \left(\frac{P - X}{\sqrt{2}A} \right)^3 \frac{1}{3B^2}$$

Uma vez que os esforços permanecem constantes ao longo de cada barra, a energia de deformação complementar, calculada a partir das expressões acima será:

$$U^* = 2 \left(\frac{P - X}{\sqrt{2}A} \right)^3 \frac{1}{3B^2} (L\sqrt{2}A) + \left(\frac{X}{A} \right)^3 \frac{1}{3B^2} (LA) = \frac{L}{3B^2A^2} [(P - X)^3 + X^3]$$

Chega-se, então, a uma expressão para a energia de deformação complementar a partir da redundante X . Aplicando-se o Segundo Teorema de Engesser, equação (1.142), e lembrando que o deslocamento correspondente a X é nulo, por se tratar de apoio fixo, chega-se a:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} = \frac{L}{3B^2A^2} [-3(P - X)^2 + 3X^2] = 0 \quad (1.146)$$

obtem-se o valor da força X , em função do carregamento P :

$$X = \frac{P}{2}$$

Logo, retornando às expressões (1.144), obtém-se, finalmente, os esforços solicitantes nas barras da treliça:

$$N_{AD} = N_{CD} = \frac{P}{2\sqrt{2}} \quad (\text{tração}) \quad (1.147)$$

$$N_{BC} = \frac{P}{2} \quad (\text{tração})$$

Observe que a expressão (1.146) representa uma relação não-linear entre a energia complementar e a redundante X . Isso já era esperado uma vez que o sistema também é não linear. Os coeficientes de flexibilidade não são constantes, sendo função de X . Tal procedimento de análise caracteriza, como já dito anteriormente no texto, o **Método das Forças**. Já sua particularização, conhecida como Método da Flexibilidade, corresponde a aplicação do Segundo Teorema de Engesser, em problemas onde existe linearidade física, como será visto no item seguinte.

1.5.13 Teorema de Castigliano do Trabalho Mínimo (Teorema de Ménabréa)

Em sistemas estruturais elásticos-lineares, lembrando-se que $U = U^*$, as equações (1.140 e 1.142) podem ser redefinidas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \quad (1.148)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = s_i \quad (1.149)$$

Esta nova formulação descrita a partir da energia de deformação interna corresponde ao **Teorema de Castigliano do Trabalho Mínimo ou Teorema de Castigliano da Compatibilidade**²⁴, sendo, portanto, um caso particular do Segundo Teorema de Engesser.

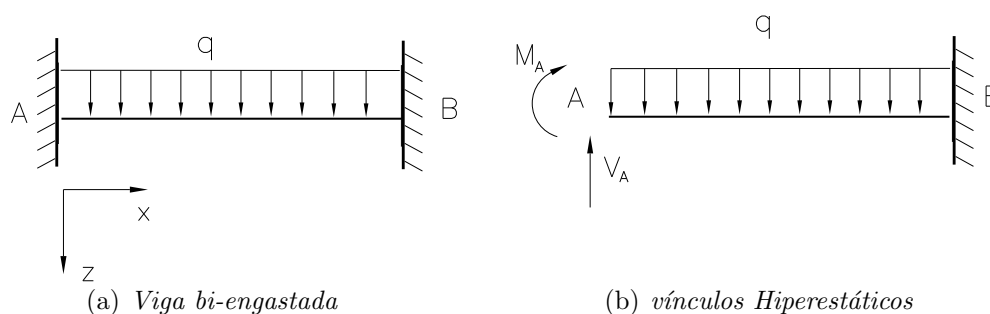


Figura 1.26: *Problema Hiperestático*

■ **Exemplo 1.5.12** Na figura (1.26(a)), encontra-se representada uma viga bi-engastada, de material elástico-linear, sujeita à ação de um carregamento uniformemente distribuído q . Sabendo-se que a rigidez à flexão da estrutura vale EI , pede-se determinar as reações de apoio, desprezando o efeito do esforço cortante.

Solução

A estrutura descrita neste problema corresponde a um sistema hiperestático, com a presença de dois vínculos a mais. Novamente, as equações de equilíbrio não são suficientes para se resolver o problema, devendo-se recorrer à aplicação do Segundo Teorema de Engesser. Como, porém, o material é elástico-linear estar-se-á utilizando o caso particular definido como **Teorema de Castigliano do Trabalho Mínimo ou Teorema de Ménabréa**.

Desse modo, a primeira etapa para a solução do problema é a obtenção de uma expressão para a energia de deformação complementar em função dos vínculos hiperestáticos,

²⁴é possível encontrá-lo na literatura denominado como *Princípio do Trabalho Mínimo*. Este foi o nome utilizado pelo nobre, engenheiro e general italiano Luigi Fredrerico Ménabréa (1809-1896) ao enunciá-lo em 1858, sem, entretanto, uma prova satisfatória.

equação (1.43). Como será desprezada a influência do esforço cortante, apenas a primeira parte da equação será utilizada:

$$U^* = \int_0^l \left[\frac{1}{2EI_{yy}} M_y^2 \right] dx \quad (1.150)$$

Para este problema, o momento de engaste, M_A , e a reação vertical de apoio, V_A , são escolhidos como esforços redundantes, figura (1.26(b)). Estes esforços serão, portanto, as coordenadas generalizadas, do problema, em função das quais o momento de flexão ao longo do comprimento deve ser expresso:

$$M_y = V_A x + M_A - q \frac{x^2}{2} \quad (1.151)$$

Substituindo-se a expressão acima na equação (1.150), e lembrando que para o caso elástico-linear a energia de deformação coincide com a complementar, chega-se a:

$$U = U^* = \int_0^l \frac{1}{2EI} \left[V_A x + M_A - \frac{qx^2}{2} \right]^2 dx$$

A expressão acima define, portanto, a energia de deformação interna em função dos vínculos hiperestáticos. Como tais esforços são reações de apoio, os deslocamentos a eles correspondentes são nulos. Aplicando-se, então, o Teorema de Castigliano do Trabalho Mínimo, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial V_A} = \frac{1}{2EI} \int_0^l \frac{\partial}{\partial V_A} \left[V_A x + M_A - \frac{qx^2}{2} \right]^2 dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{V_A L^3}{3} + \frac{M_A L^2}{2} - \frac{qL^4}{8} \right] = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{1}{2EI} \int_0^l \frac{\partial}{\partial M_A} \left[V_A x + M_A - \frac{qx^2}{2} \right]^2 dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{V_A L^2}{2} + M_A L - \frac{qL^3}{6} \right] = 0 \end{cases} \quad (1.152)$$

que pode ser simplificado em:

$$\begin{cases} \frac{L^3}{3EI} V_A + \frac{L^2}{2EI} M_A = \frac{qL^4}{8EI} \\ \frac{L^2}{2EI} V_A + \frac{L}{EI} M_A = \frac{qL^3}{6EI} \end{cases} \quad (1.153)$$

cuja solução é:

$$V_A = \frac{qL}{2} \quad M_A = -\frac{qL^2}{12}$$

O sinal negativo para o momento indica que a reação obtida deve estar orientada de maneira contrária ao sentido convencionado inicialmente.

Ao contrário do exemplo (1.5.10), o sistema de equações agora obtido, (1.153), é linear. Portanto, os coeficientes das redundantes, definidos como coeficientes de flexibilidade, são constantes. O procedimento de análise pode ser, então, identificado como **Método da Flexibilidade**, caso particular do Método das Forças.

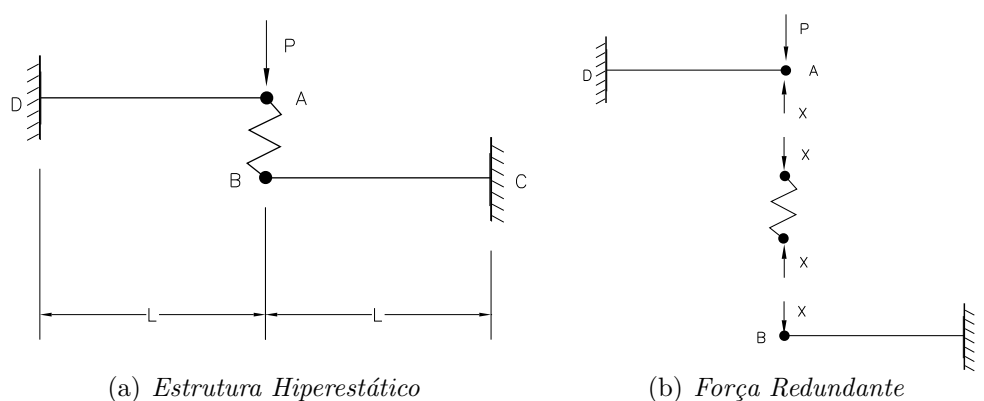


Figura 1.27: Problema Hiperestático

■ **Exemplo 1.5.13** Duas barras em balanço estão conectadas por uma mola linear de constante K , como indicado na figura (1.27(a)). Supondo $K = \alpha EI/L^3$, onde E é o módulo de elasticidade do material que compõe as barras e I o momento de inércia da seção transversal, determine a força que solicita a mola, para os seguintes valores da constantes de proporcionalidade α :

a. $\alpha \rightarrow \infty$

b. $\alpha = 3$

c. $\alpha \rightarrow 0$

Desconsidere a influência do esforço cortante.

Solução

Observando a figura (1.27(a)) verifica-se que o sistema é hiperestático, apresentando um vínculo externo a mais. Tal redundante pode ser, por exemplo, uma das reações de momento dos apoios. Como as relações são lineares, o procedimento de solução envolveria, portanto, o cálculo da energia de deformação em função desta redundante. A aplicação do Teorema de Castigliano do Trabalho Mínimo implicaria na obtenção de uma equação, cuja solução forneceria a reação de apoio. A partir dela seria obtido o esforço presente na mola. Existe, porém, uma alternativa mais direta. Para isso é necessário que se entenda a mola como um vínculo interno, cuja eliminação implicaria no surgimento de duas estruturas isostáticas, figura (1.27(a)). Sendo assim, a única redundante presente passa a ser a força X que atua sobre a mola e sobre as vigas. Força esta que deve descrever a energia de deformação, para que, ao se aplicar o Teorema de Castigliano do Trabalho Mínimo, surja como a solução direta.

Dentro deste enfoque, a distribuição do momento de flexão ao longo das duas barras, devido à ação da força X nas extremidades A e B , será:

$$\begin{aligned} M_{AD} &= -(P - X)x \quad (\text{barra } AD) \\ M_{BC} &= -(X)x' \quad (\text{barra } BC) \end{aligned} \quad (1.154)$$

A energia de deformação interna, que coincide, sendo o sistema linear, com a energia de deformação complementar, equação (1.43), deverá ser obtida utilizando-se as expressões para os momentos de flexão definidos acima:

$$U = U_{AD}^* + U_{BD}^* = \int_0^L \frac{[(P - X)x]^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{[(X)x']^2}{2EI} dx = \frac{L^3}{6EI} [P^2 - 2PX + 2X^2]$$

Para se aplicar o Teorema de Castigliano do Trabalho Mínimo, deve-se definir o deslocamento correspondente à coordenada generalizada empregada. Através da figura (1.27(a)) pode-se observar que a mola deverá sofrer uma redução em seu comprimento em função da força X que as vigas fazem sobre ela. O deslocamento relativo entre as extremidades A e B será portanto:

$$s_{AB} = -\frac{X}{K}$$

O sinal negativo descreve a aproximação entre A e B. Observe que tal representação se deve ao sentido adotado para o esforço X , na figura (1.27(a)), onde espera-se que a mola esteja comprimida. Caso o sentido inverso fosse adotado, ou seja, a mola estivesse tracionada, o deslocamento s_{AB} seria positivo e o sinal de X nas expressões (1.154) seria alterado. De qualquer maneira, o resultado final permaneceria o mesmo.

Aplicando-se, finalmente, o Teorema do Trabalho Mínimo de Castigliano tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{L^3}{6EI} [-2P + 4X] = s_{AB} = -\frac{X}{K}$$

que resulta em:

$$X = \frac{\frac{PL^3}{3EI}}{\frac{2L^3}{3EI} + \frac{1}{K}}$$

Para $K = \alpha EI/L^3$, a expressão acima pode ser simplificada:

$$X = \frac{P}{2 + \frac{3}{\alpha}} \quad (1.155)$$

Como a redundante X corresponde a um valor positivo, conclui-se, de acordo com a convenção adotada, que a mola estará comprimida. Se para a análise, X tivesse sido orientada no sentido contrário, isto é, tracionando a mola, o resultado obtido teria que ser negativo, para que a solução fosse coerente.

Resta agora realizar o estudo da força X para os três valores de α , pedidos no enunciado do problema.

a. $\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow X \rightarrow \frac{P}{2}$

b. $\alpha = 3 \Rightarrow X = \frac{P}{3}$

c. $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow X \rightarrow 0$

Note que $\alpha \rightarrow \infty$ significa que a mola adquire rigidez infinita, fazendo com que a estrutura trabalhe como uma viga bi-engastada solicitada por uma carga concentrada no meio do

vão. Já $\alpha \rightarrow 0$ define rigidez nula para mola, que deixa de oferecer qualquer resistência ao deslocamento relativo entre os pontos A e B . Tem-se então duas vigas em balanço independentes. A primeira viga AD tem uma carga concentrada em sua extremidade A enquanto que a segunda viga BC não será solicitada.

Capítulo 2

Trabalhos Virtuais

2.1 Trabalho Virtual em uma partícula

Considere uma partícula, em repouso, submetida a um sistema de forças $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_i, \dots, \vec{P}_n$, como indicado na figura (2.1). Sob a ação de uma força \vec{F} , não pertencente ao sistema de forças \vec{P} , a partícula entra em movimento acelerado, até que uma força

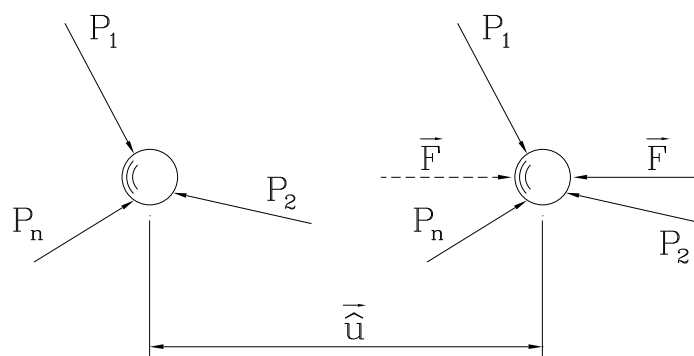


Figura 2.1: *Trabalho Virtual em partículas.*

de mesmo módulo, mesma direção e sentido contrário ao de \vec{F} lhe seja aplicada, retornando a partícula à condição de repouso inicial. O trabalho total realizado pela força \vec{F} e pelo sistema de forças \vec{P}_i , durante o deslocamento \hat{u} , devido ao movimento acelerado da partícula, pode ser expresso por:

$$W_T = P_{1\hat{u}} \hat{u} + P_{2\hat{u}} \hat{u} + \dots + P_{i\hat{u}} \hat{u} + \dots + P_{n\hat{u}} \hat{u} + F \hat{u}$$

$$W_T = \sum_{i=1}^n P_{i\hat{u}} \hat{u} + F \hat{u} \quad (2.1)$$

onde $P_{i\hat{u}} = \vec{P}_i \cdot \frac{\vec{\hat{u}}}{|\vec{\hat{u}}|}$, é a projeção da força genérica \vec{P}_i , do sistema de forças atuantes na partícula em repouso, na direção do deslocamento $\vec{\hat{u}}$. Definindo como trabalho real, W_R , o trabalho observável, tem-se:

$$W_R = F \hat{u}$$

Este trabalho, W_R , deve ser igual ao trabalho total W_T , o que implica que o 1º termo do 2º membro da equação (2.1) seja nulo¹, i.e.:

$$\sum_{i=1}^n P_{i\hat{u}} \hat{u} = 0$$

Define-se esta parcela como *trabalho virtual*, \hat{W} , portanto,

$$\hat{W} = \sum_{i=1}^n P_{i\hat{u}} \hat{u} = 0 \quad (2.2)$$

O trabalho virtual relaciona o sistema de forças \vec{P} , atuante na partícula, ao deslocamento causado pela força externa \vec{F} , que não pertence ao sistema em repouso. Pode-se entender esta força externa \vec{F} como uma perturbação no sistema de forças \vec{P} em questão. Desta forma, no estudo do sistema, somente o trabalho $\sum_{i=1}^n P_{i\hat{u}} \hat{u}$ é de interesse.

No que se segue, abole-se a utilização da força \vec{F} , que está relacionada com o trabalho efetivamente realizado sobre o sistema por ela, e introduz-se o conceito de *deslocamento virtual*, no qual o agente causador deste é deixado de lado, como uma abstração.

Como o \hat{u} é comum a todos os termos da equação (2.2), e é qualquer, então:

$$\sum_{i=1}^n P_{i\hat{u}} = 0$$

A equação acima foi estabelecida no século *XVII* por Isaac Newton², e expressa a relação de equilíbrio de forças na direção \hat{u} . Portanto, o trabalho virtual realizado pelas forças

¹Resultado similar pode ser obtido se a partícula estiver em movimento com velocidade constante.

²Newton, I.S., *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, S. Pepys, Reg. Soc. Præses, Julii 5. 1686.

atuantes em uma partícula em repouso (ou em movimento retilíneo uniforme), devido a um deslocamento virtual nela aplicado, permite a determinação da equação de movimento da partícula na direção do deslocamento virtual.

A expressão *deslocamento virtual* significa que este é meramente imaginário, uma vez que o agente causador do mesmo não é de interesse ao estudo do sistema. Portanto, o *deslocamento virtual* é arbitrariamente imposto sobre o sistema em estudo e pode ser entendido como uma técnica de perturbação para estudar o comportamento do mesmo. O trabalho realizado pelas forças reais do sistema, durante o *deslocamento virtual*, é denominado *trabalho virtual*.

Assim sendo, pode-se enunciar o *Princípio dos Trabalhos Virtuais* para uma partícula como segue:

“Se uma partícula está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, o trabalho virtual realizado durante qualquer deslocamento virtual, arbitrariamente imposto sobre esta, é nulo.”

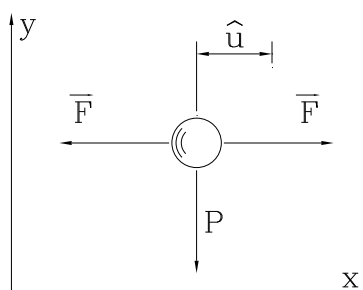


Figura 2.2: *Trabalho Virtual em partículas.*

Observe que se o trabalho virtual devido a um deslocamento virtual em uma direção específica é nulo, não implica que a partícula esteja necessariamente em repouso (ou em movimento retilíneo uniforme). Pela figura (2.2), observa-se que $(F - F) \hat{u} = 0$ e $P \hat{v} \neq 0$. Para que a partícula esteja em equilíbrio é necessário que para todas as direções possíveis de deslocamentos virtuais, o trabalho virtual seja nulo. Os deslocamentos virtuais em qualquer direção podem ser expressos por um conjunto de deslocamentos virtuais de direções linearmente independentes. No caso de partícula no plano bastam dois deslocamentos virtuais em direção independentes para que a condição de repouso

fique assegurada. Em três dimensões seriam necessários deslocamentos em três direção independentes. Este raciocínio pode ser utilizado em um sistema de partículas com vários graus de liberdade, onde o número de deslocamentos virtuais independentes deve coincidir com o número de graus de liberdade do sistema.

Leonardo da Vinci usou rudimentos do princípio dos trabalhos virtuais quase 250 anos antes do nascimento de Newton ao estudar mecanismos de roldanas e braços de alavanca³. Embora Aristóteles possa ter usado este princípio 350 anos *a.c.*, atribui-se a John Bernoulli a primeira formulação geral do princípio dos trabalhos virtuais, documentado em uma carta sua para Varignon⁴ no início do século XVIII.

2.2 Trabalho Virtual em corpos rígidos

O princípio dos trabalhos virtuais também pode ser aplicado a sistemas de corpos rígidos, uma vez que estes constituem um conjunto de partículas restritas a manter distâncias constantes uma das outras por um conjunto de forças generalizadas, i.e., forças e momentos em equilíbrio.

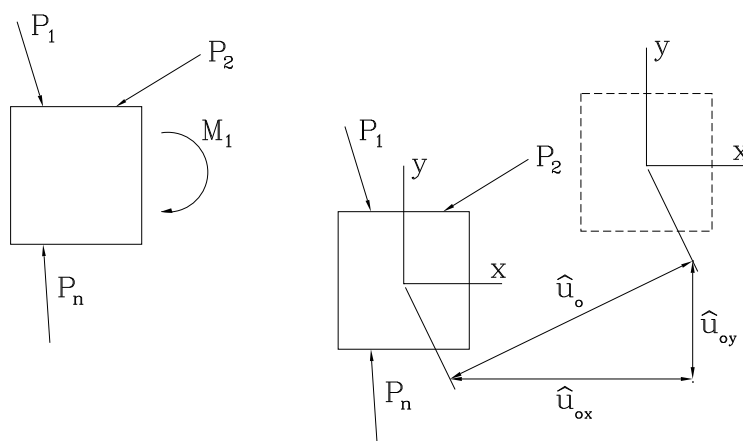


Figura 2.3: *Trabalho Virtual em corpo rígido.*

Duas partículas no plano sujeitas a manter distância constante entre si, constituem a essência de um corpo rígido. Seus quatro graus de liberdade, no plano, são reduzidos

³Oden, J. T. and Ripperger, E. A., *Mechanics of Elastic Structures*, 2nd ed., Mc Graw-Hill, 1981.

⁴Timoshenko, S. P., *History of Strength of Materials*, Dover, 1983.

para três devido à condição de restrição que lhes foi imposta. Portanto, as equações de movimento do corpo rígido no plano, podem ser obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais com somente três deslocamentos virtuais independentes. Em particular, se o trabalho virtual total devido a três deslocamentos virtuais independentes, em um corpo rígido no plano, for nulo, então esse corpo está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

Raciocínio similar pode ser utilizado em sistemas mecânicos em geral, como é o caso de mecanismos em corpos rígidos. Nesse caso, o número de deslocamentos virtuais independentes coincide com o número de graus de liberdade do sistema.

Considere um corpo rígido sob a ação de um sistema de forças \vec{P} . A esse corpo podem ser associados deslocamentos virtuais de translação, rotação, ou uma combinação de translação e rotação. Seja, por exemplo, o caso de uma translação virtual na direção de x , \hat{u}_{0x} , e outra translação virtual na direção de y , \hat{u}_{0y} , imposta ao corpo rígido, como indicado na figura (2.3).

O trabalho virtual \hat{W} realizado pelas forças \vec{P}_i , pode ser expresso por:

$$\hat{W} = \sum_{i=1}^n (P_{ix} \hat{u}_{0x} + P_{iy} \hat{u}_{0y}) = \hat{u}_{0x} \sum_{i=1}^n P_{ix} + \hat{u}_{0y} \sum_{i=1}^n P_{iy} \quad (2.3)$$

onde P_{ix} e P_{iy} são as projeções de \vec{P}_i nas direções de \hat{u}_{0x} e \hat{u}_{0y} , ou seja, nas direções dos eixos coordenados x e y , respectivamente.

Pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, $\hat{W} = 0$. Uma vez que \hat{u}_{0x} e \hat{u}_{0y} são deslocamentos virtuais arbitrários, a equação (2.3) se reduz a:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0$$

As equações acima expressam as relações de equilíbrio nas direções x e y respectivamente.

às vezes, na formulação do problema, é desejável, *por conveniência*, que os deslocamentos virtuais sejam pequenos, ou mesmos infinitesimais. Esse é o caso da rotação virtual de corpo rígido, onde supõem-se pequenas rotações, permitindo que os ângulos se aproximem de seus senos e tangentes, simplificando a formulação do problema. Considere que o corpo

rígido da figura (2.3) seja submetido a uma rotação virtual $\hat{\alpha}_0$. O trabalho virtual \hat{W} realizado pelas forças \vec{P}_i , nesse caso, pode ser expresso por:

$$\hat{W} = \sum_{i=1}^n (P_{ix} \hat{\alpha}_0 y_i + P_{iy} \hat{\alpha}_0 x_i) = \hat{\alpha}_0 \sum_{i=1}^n (P_{ix} y_i + P_{iy} x_i)$$

Pelo princípio dos deslocamentos virtuais, segue que:

$$\hat{W} = \hat{\alpha}_0 \sum_{i=1}^n M_i^0 = 0$$

Como $\hat{\alpha}_0$ é uma rotação virtual qualquer, embora, *por conveniência*, infinitesimal, tem-se:

$$\sum_{i=1}^n M_i^0 = 0$$

A equação acima representa o equilíbrio de momento das forças \vec{P}_i em relação a um eixo perpendicular ao plano do papel passando pelo ponto O .

■ **Exemplo 2.2.1** Considere a alavanca indicada na figura (2.4). Calcule os valores \vec{F}_1 e \vec{F}_2 de modo que a alavanca permaneça em repouso na posição horizontal.

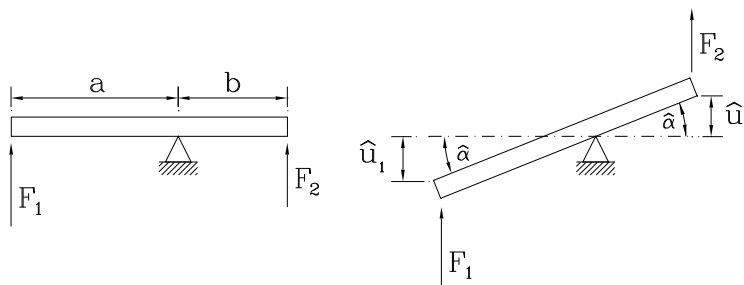


Figura 2.4: Alavanca de Arquimedes.

Solução:

Associando uma rotação virtual $\hat{\alpha}$, infinitesimal ⁵, pelo P.T.V. (Princípio do Trabalho Virtual) tem-se que:

$$\sum_{i=1}^n F_i \hat{u}_i = 0 \quad \text{ou,} \quad - F_1 \hat{u}_1 + F_2 \hat{u}_2 = 0$$

⁵Por conveniência é desejável que as forças F_1 e F_2 se desloquem, aproximadamente, em paralelo à direção dos deslocamentos virtuais.

onde o sinal negativo indica que o deslocamento \hat{u}_1 está na direção oposta à direção da força F_1 .

Para pequenos deslocamentos, $\tan \hat{\alpha} \simeq \hat{\alpha} = \frac{\hat{u}_1}{a}$ e $\tan \hat{\alpha} \simeq \hat{\alpha} = \frac{\hat{u}_2}{b}$, ou seja:

$$\frac{\hat{u}_1}{a} = \frac{\hat{u}_2}{b} \quad (\text{equação de compatibilidade})$$

Assim,

$$-F_1 \left(\frac{a}{b} \hat{u}_2 \right) + F_2 \hat{u}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_2 \left(-F_1 \frac{a}{b} + F_2 \right) = 0$$

Como \hat{u}_2 é um deslocamento virtual de valor infinitesimal arbitrário, tem-se:

$$F_1 a = F_2 b$$

que é a relação de alavanca de Arquimedes, a qual expressa o equilíbrio de momentos em torno de um eixo perpendicular ao plano da figura, passando pelo ponto de apoio da alavanca.

■ **Exemplo 2.2.2** Para o sistema de roldanas, ilustrado na figura (2.5), determine o valor das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .

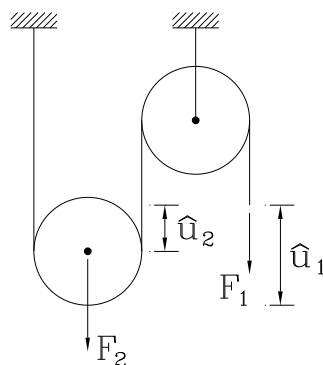


Figura 2.5: Sistema de roldanas.

Solução:

Pelo Princípio do Trabalho Virtual, tem-se:

$$\sum_{i=1}^n F_i \hat{u}_i = 0$$

Assim, para o deslocamento virtual \hat{u}_1 , obtém-se:

$$F_1 \hat{u}_1 - F_2 \hat{u}_2 = 0$$

mas, como $|\hat{u}_1| = 2|\hat{u}_2|$, então,

$$F_1 (2\hat{u}_2) - F_2 \hat{u}_2 = 0 \quad \text{ou,} \quad (2F_1 - F_2) \hat{u}_2 = 0$$

Como \hat{u}_2 é um deslocamento virtual de valor arbitrário, conclui-se que:

$$F_2 = 2F_1$$

ou seja, a força atuante na roldana é duas vezes a força F_1 . Esse sistema é amplamente utilizado em mecanismos de levantamento de peso. Em geral, esses mecanismos são constituídos de um conjunto de roldanas móveis e fixas, aumentando a relação da força a ser levantada com a força F_1 .

■ **Exemplo 2.2.3** Em relação ao problema da alavanca, calcule a reação de apoio da alavanca substituindo o vínculo físico por uma força \vec{R} .

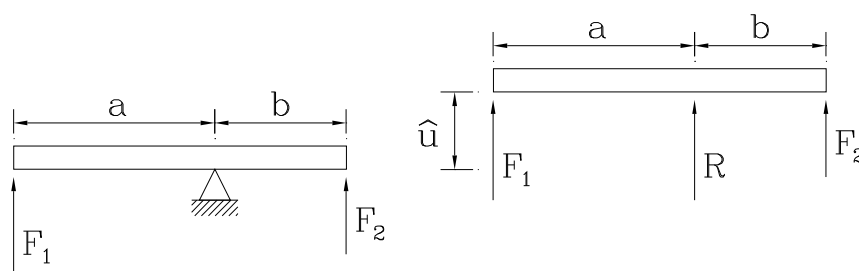


Figura 2.6: Reação de apoio em uma alavanca.

Solução:

Efetuada um deslocamento virtual \hat{u} (movimento de corpo rígido) e observando que \hat{u} não é necessariamente infinitesimal, mas é desejável que seja finito, vem que:

$$\sum_{i=1}^n F_i \hat{u}_i = 0$$

ou

$$F_1 \hat{u} + F_2 \hat{u} + R \hat{u} = 0$$

Assim,

$$(F_1 + F_2 + R) \hat{u} = 0$$

outra vez, como \hat{u} é um deslocamento virtual de valor arbitrário, tem-se que

$$R = -(F_1 + F_2)$$

O sinal negativo indica que o sentido da força reativa R é oposto àquele adotado na figura (2.6).

■ **Exemplo 2.2.4** Determine as reação de apoio R_A e R_B para a viga da figura (2.7), pelo P.T.V..

Solução:

Escolhendo um deslocamento virtual de corpo rígido de tal forma que, das reação de apoio, somente R_B realize trabalho virtual (figura 2.7.b), tem-se:

$$\sum_{i=1}^n F_i \hat{u}_i = 0 \Rightarrow -P a \frac{\hat{u}}{l} + R_B \hat{u} = 0 \quad \text{ou,} \quad (R_B - P \frac{a}{l}) \hat{u} = 0$$

Como \hat{u} é um deslocamento virtual arbitrário não-nulo,

$$R_B = P \frac{a}{l}$$

Note que se existisse um momento concentrado M_B no apoio B , ele também realizaria trabalho virtual. Qual seria o valor do trabalho virtual nesse caso?

Considere, agora, um deslocamento virtual de translação de corpo rígido, como indicado na figura (2.7.c). Pelo princípio dos trabalhos virtuais, $\sum_{i=1}^n F_i \hat{u}_i = 0$, segue que:

$$R_A \hat{u} + R_B \hat{u} - P \hat{u} = 0$$

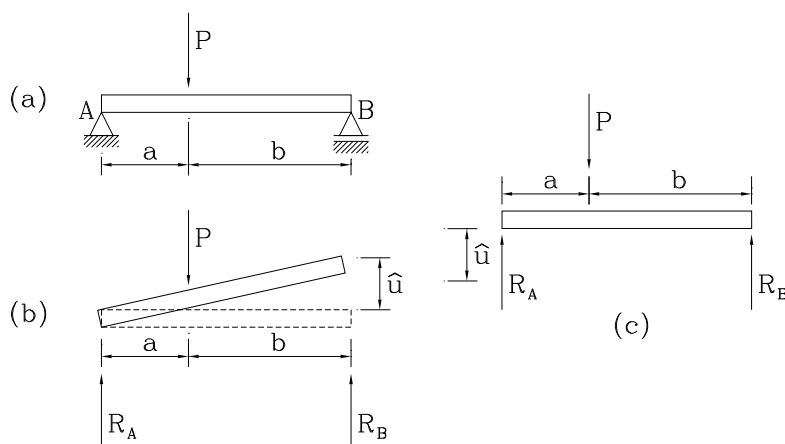


Figura 2.7: *Reação de apoio em uma viga bi-apoiada.*

como \hat{u} é arbitrário, então:

$$P = R_A + R_B$$

como $R_B = P a/l$, obtém-se:

$$R_A = P \frac{b}{l}$$

para $a = b = \frac{l}{2}$,

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

■ **Exemplo 2.2.5** *Determine os esforços solicitantes na seção S para a viga bi-apoiada do exemplo 2.2.4.*

Solução:

Para o cálculo do esforço cortante V_S na seção S à esquerda, indicada na figura (2.8.a), associa-se um deslocamento virtual de translação no corpo rígido à esquerda da seção S (figura 2.8.c). A expressão para o trabalho virtual é, então, dada por:

$$R_A \hat{u}_1 + V_S \hat{u}_1 - P \hat{u}_1 = 0$$

$$(V_S + R_A - P) \hat{u}_1 = 0$$

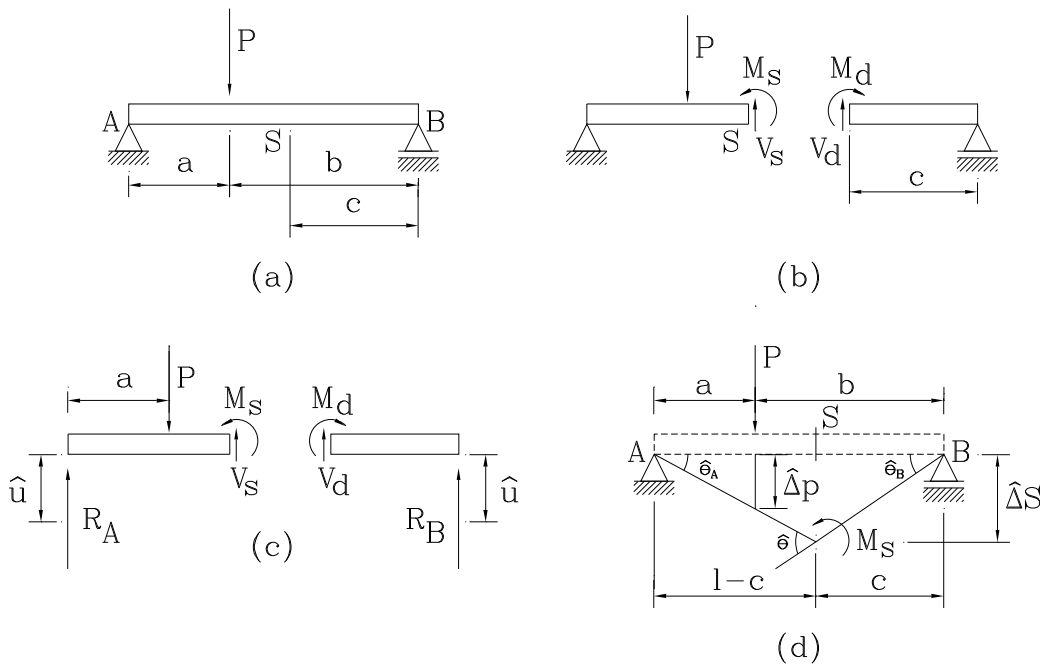


Figura 2.8: Esforços solicitantes em uma viga bi-apoiada.

Como \hat{u}_1 é arbitrário,

$$V_S = P - R_A = P - \frac{Pb}{l} = P \frac{(l-b)}{l} \quad \text{ou,} \quad V_S = \frac{Pa}{l}$$

Similarmente, para um deslocamento virtual de translação no corpo rígido à direita da seção S (figura 2.8.c), tem-se:

$$R_B \hat{u}_2 + V_d \hat{u}_2 = 0 \quad \text{ou,} \quad V_d = -R_B = -\frac{Pa}{l}$$

O resultado acima implica que $V_S = -V_d$, ou seja, o esforço cortante da seção à esquerda é de mesmo módulo, porém de sinal oposto ao esforço cortante da seção à direita. Esta relação também poderia ser obtida utilizando-se a lei de ação e reação de Newton.

Para determinar-se o momento de flexão na seção S , considere o deslocamento de corpo rígido mostrado na figura (2.8.d). O trabalho virtual é dado por:

$$P \hat{\Delta p} - M_S \hat{\theta} = 0 \tag{2.4}$$

Note que nesta rotação não houve corte da seção e os esforços cortantes são forças internas do corpo rígido. Portanto, o trabalho virtual associado a estas forças cortantes é nulo, uma vez que elas ocorrem aos pares (ação e reação).

As relações de compatibilidade geométrica do deslocamento virtual de corpo rígido imposto na barra, supondo, por conveniência, pequena rotação $\hat{\theta}$, são dadas por:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_A + \hat{\theta}_B \quad e \quad \hat{\Delta}p = \frac{a}{l-c} \hat{\Delta}s$$

onde,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\hat{\theta}_A &= \frac{\hat{\Delta}p}{a} \Rightarrow \hat{\theta}_A \approx \frac{\hat{\Delta}p}{a} \\ \operatorname{tg}\hat{\theta}_B &= \frac{\hat{\Delta}s}{c} \Rightarrow \hat{\theta}_B \approx \frac{\hat{\Delta}s}{c} \end{aligned}$$

$$\text{ou,} \quad \hat{\theta} \cong \frac{\hat{\Delta}p}{a} + \frac{\hat{\Delta}s}{c} = \frac{\hat{\Delta}p}{a} + \frac{(l-c)}{a} \frac{\hat{\Delta}p}{c} = \frac{l}{ac} \hat{\Delta}p$$

$$\text{então,} \quad \hat{\Delta}p = \frac{ac}{l} \hat{\theta}$$

Substituindo $\hat{\Delta}p$, da equação acima, na expressão (2.4) do trabalho virtual, vem que:

$$P \frac{ac}{l} \hat{\theta} - M_s \hat{\theta} = 0$$

como $\hat{\theta}$ é qualquer,

$$M_s = P \frac{ac}{l}$$

■ **Exemplo 2.2.6** Para a treliça da figura (2.9), determinar o esforço normal na barra 2, usando o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Solução:

Cortando a barra 2, a treliça descreverá o movimento de corpo rígido, ou mecanismo, indicado na figura (2.9.b). Para satisfazer a condição de compatibilidade do mecanismo de corpo rígido é necessário que:

$$\hat{\alpha} l = \hat{\theta} 2l \quad \text{então,} \quad \hat{\alpha} = 2\hat{\theta}$$

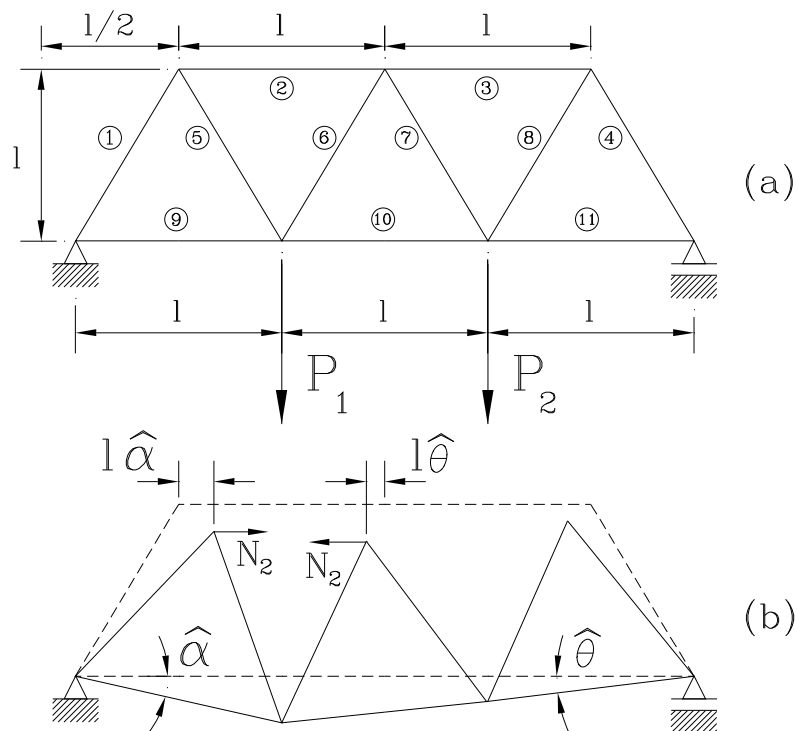


Figura 2.9: *Treliça plana.*

Os trabalhos realizados pelas forças P_1 , P_2 e N_2 , para $\hat{\alpha}$ e $\hat{\theta}$ convenientemente pequenos, podem ser expressos como:

$$\begin{aligned}\hat{W}_{P_1} &= P_1 l \hat{\alpha} = 2P_1 l \hat{\theta} \\ \hat{W}_{P_2} &= P_2 l \hat{\theta} \\ \hat{W}_{N_2} &= N_2 l(\hat{\alpha} + \hat{\theta}) = 3N_2 l \hat{\theta}\end{aligned}$$

Pelo P.T.V., o trabalho virtual total deve ser nulo. Portanto,

$$2P_1 l \hat{\theta} + P_2 l \hat{\theta} + 3N_2 l \hat{\theta} = 0$$

como $\hat{\theta}$ é qualquer,

$$N_2 = \frac{-2P_1 - P_2}{3}$$

é interessante observar que o deslocamento de corpo rígido só foi possível quando violou-se a compatibilidade de deslocamento na barra 2. Embora o deslocamento obtido seja

incompatível nesta barra, todas as outras barras deslocaram de forma geometricamente compatível com o mecanismo de corpo rígido. Em geral, ao violar-se uma condição de compatibilidade obtém-se uma expressão para o esforço solicitante, ou reação de apoio, correspondente ao vínculo violado.

Pode-se notar que em todos os casos, a quantidade \hat{u} define a magnitude do deslocamento virtual que é comum a todos os termos da equação, e pode ser cancelado. Portanto, o valor verdadeiro de \hat{u} não é importante, e pode, na medida da conveniência, ser tanto finito como infinitesimal.

A utilização do P.T.V. é equivalente ao estabelecimento das equações de movimento do sistema, que nos corpos rígidos, em repouso (ou em movimento retilíneo uniforme), se resumem nas equações de equilíbrio de corpo rígido estabelecidas por *Sir Isaac Newton* na mecânica clássica.

Nos exemplos de 2.2.4 até 2.3.1 foi possível determinar os esforços solicitantes e as reação de apoio sem utilizar-se equação constitutivas e deformação no interior das barras. Nesses casos, o problema é estaticamente determinado e bastam deslocamentos de corpo rígido para resolver o sistema. Nos caso em que o sistema estrutural é estaticamente indeterminado (hiperestático), deslocamentos virtuais envolvendo “formas deformadas” são necessários para obter-se as equações de movimento do sistema. Na seção seguinte apresenta-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais em corpos deformáveis, incluindo-se “formas deformadas virtuais”, os quais serão utilizados para estudar sistemas estruturais estaticamente indeterminados.

2.3 Trabalho Virtual em Corpos Deformáveis

Considere o sistema ilustrado na figura (2.10), constituído por uma partícula conectada a uma mola fixa no apoio sendo solicitada por uma força externa \vec{F}_e atuando na partícula. Efetuando-se um corte imaginário na mola e introduzindo, neste corte, a força que a mola exerce sobre a partícula, obtém-se o diagrama de corpo livre indicado na figura (2.10.b). Para um deslocamento virtual \hat{u} na partícula, o P.T.V. pode ser expresso por:

$$F_e \hat{u} - F_i \hat{u} = 0 \quad \text{ou,} \quad F_e \hat{u} = F_i \hat{u}$$

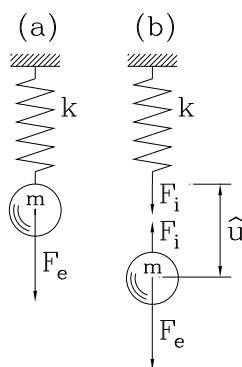


Figura 2.10: *Modelo simplificado de um corpo deformável.*

Definindo Trabalho Virtual Externo \hat{W}_{ext} como sendo o trabalho virtual realizado pelas forças externas sobre os deslocamentos virtuais correspondentes, e por Trabalho Virtual Interno \hat{W}_{int} como o trabalho realizado pelas forças internas do sistema sobre os deslocamentos virtuais correspondentes, tem-se:

$$F_e \hat{u} = \hat{W}_{ext}$$

$$F_i \hat{u} = \hat{W}_{int}$$

Portanto, o princípio dos trabalhos virtuais pode ser expresso para corpos deformáveis como:

$$\hat{W}_{ext} = \hat{W}_{int}$$

que é exatamente a expressão obtida ao isolar-se a partícula da mola no exemplo acima.

■ **Exemplo 2.3.1** *Para o sistema de molas da figura (2.11), determine os deslocamentos u_1 e u_2 devido à força externa \vec{F} aplicada ao sistema.*

Solução:

Admitindo os deslocamentos virtuais \hat{u}_1 e \hat{u}_2 nas direções de u_1 e u_2 , respectivamente, os trabalhos virtuais, externo e interno, podem ser expressos por:

$$\hat{W}_{ext} = F \hat{u}_2$$

$$\hat{W}_{int} = F_1 \hat{u}_1 + F_2 (\hat{u}_2 - \hat{u}_1)$$

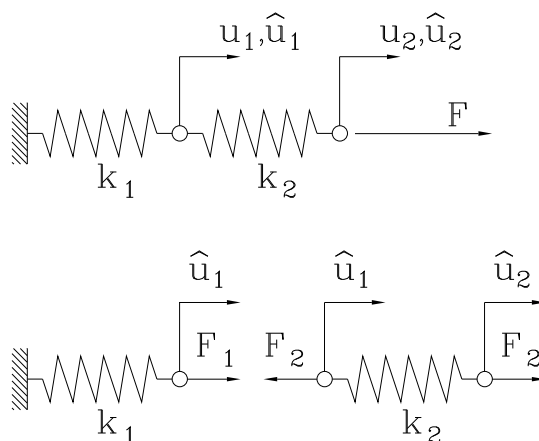


Figura 2.11: Sistema de duas molas em série.

Da equação constitutiva da mola, tem-se:

$$F_1 = k_1 u_1 \quad e \quad F_2 = k_2 (u_2 - u_1)$$

então, $\hat{W}_{int} = k_1 u_1 \hat{u}_1 + k_2 (u_2 - u_1)(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)$

pelo P.T.V., $\hat{W}_{ext} = \hat{W}_{int}$, ou seja,

$$F \hat{u}_2 = k_1 u_1 \hat{u}_1 + k_2 (u_2 - u_1)(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)$$

ou, $[k_2(u_2 - u_1) - F]\hat{u}_2 + [k_1 u_1 + k_2 u_1 - k_2 u_2]\hat{u}_1 = 0$

como \hat{u}_1 e \hat{u}_2 são arbitrários, obtém-se:

$$k_2(u_2 - u_1) = F \tag{2.5}$$

$$(k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = 0 \tag{2.6}$$

que podem ser representadas matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

As equações acima expressam as relações de equilíbrio do sistema. A mola equivalente do sistema pode ser obtida substituindo a expressão (2.6) em (2.5), como segue:

$$\begin{aligned} k_2 \left(u_2 - \frac{k_2}{k_1 + k_2} u_2 \right) &= F \\ k_2 \left(\frac{k_1 u_2}{k_1 + k_2} \right) &= F \end{aligned}$$

$$\text{ou,} \quad \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right) u_2 = F \quad \therefore \quad u_2 = \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \right) F \quad (2.7)$$

Portanto, a expressão $\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right)$ representa a mola equivalente do sistema e também pode ser expressa como:

$$k_{eq} = \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right) = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

■ **Exemplo 2.3.2** Usando o Princípio dos Trabalhos Virtuais determine as forças nas molas AC e BC devido a uma força P, na direção de y, atuando em C.

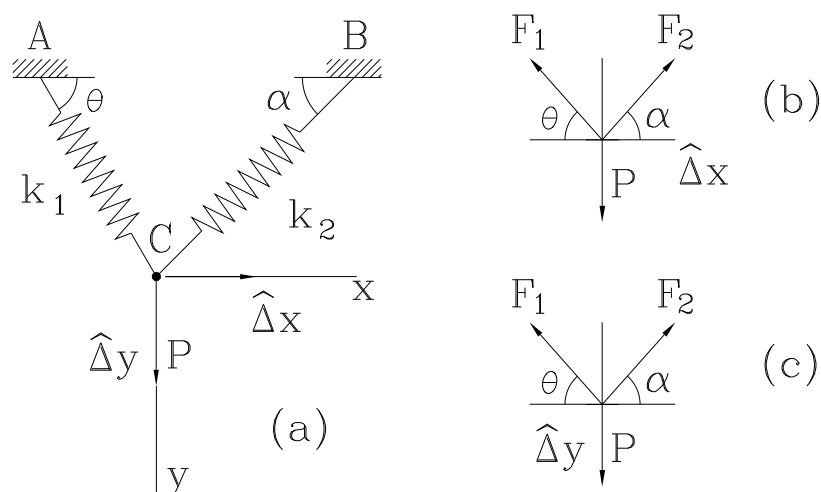


Figura 2.12: Sistema de molas inclinadas.

Solução:

Considere um deslocamento virtual $\hat{\Delta}x$ na direção x (figura 2.12.b), e outro deslocamento virtual $\hat{\Delta}y$ na direção y (figura 2.12.c). Assim, na direção x tem-se:

$$\hat{W}_{ext} = 0 \quad (2.8)$$

$$\hat{W}_{int} = -F_2 \cos(\alpha) \hat{\Delta}x + F_1 \cos(\theta) \hat{\Delta}x \quad (2.9)$$

na direção y ,

$$\hat{W}_{ext} = P \hat{\Delta}y \quad (2.10)$$

$$\hat{W}_{int} = F_1 \sin(\theta) \hat{\Delta}y + F_2 \sin(\alpha) \hat{\Delta}y \quad (2.11)$$

Pelo P.T.V., $\hat{W}_{ext} = \hat{W}_{int}$, e pelas equações de (2.8) a (2.11), segue que:

$$[F_1 \cos(\theta) - F_2 \cos(\alpha)] \hat{\Delta}x = 0 \quad (2.12)$$

$$[F_1 \sin(\theta) + F_2 \sin(\alpha)] \hat{\Delta}y = P \hat{\Delta}y \quad (2.13)$$

Como os deslocamentos virtuais $\hat{\Delta}x$ e $\hat{\Delta}y$ podem ser quaisquer, as expressões (2.12) e (2.13) podem ser re-escritas como:

$$F_1 \cos(\theta) - F_2 \cos(\alpha) = 0 \quad (2.14)$$

$$F_1 \sin(\theta) + F_2 \sin(\alpha) = P \quad (2.15)$$

Observe que estas últimas equações expressam o equilíbrio do ponto C nas direções x e y , respectivamente. é interessante observar também que $\hat{\Delta}x$ e $\hat{\Delta}y$ não são necessariamente infinitesimais, podendo assumir valores finitos quaisquer. Isto foi possível, por que na formulação não foram utilizadas as relações constitutivas para restringir os deslocamentos a valores infinitesimais.

Pelas equações (2.14) e (2.15),

$$F_2 = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\alpha)} F_1 \quad e \quad F_1 = \frac{P}{\sin(\theta)} - F_2 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\theta)} \quad (2.16)$$

Substituindo a expressão (2.16) em (2.15) e simplificando, tem-se:

$$F_1 = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\theta + \alpha)} P \quad e \quad F_2 = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta + \alpha)} P$$

Para $\alpha = \theta = \frac{\pi}{4}$,

$$F_1 = F_2 = \frac{P\sqrt{2}}{2}$$

As equações acima expressam a condição de equilíbrio do nó C e poderiam ter sido obtidas fazendo-se o equilíbrio de forças do nó C . Não foi necessário usar as equações constitutivas uma vez que o problema é estaticamente determinado.

■ **Exemplo 2.3.3** Utilizando campos de deslocamentos compatíveis, determine os deslocamentos dos nós, e as forças atuantes nas molas, para o sistema representado na figura (2.13).

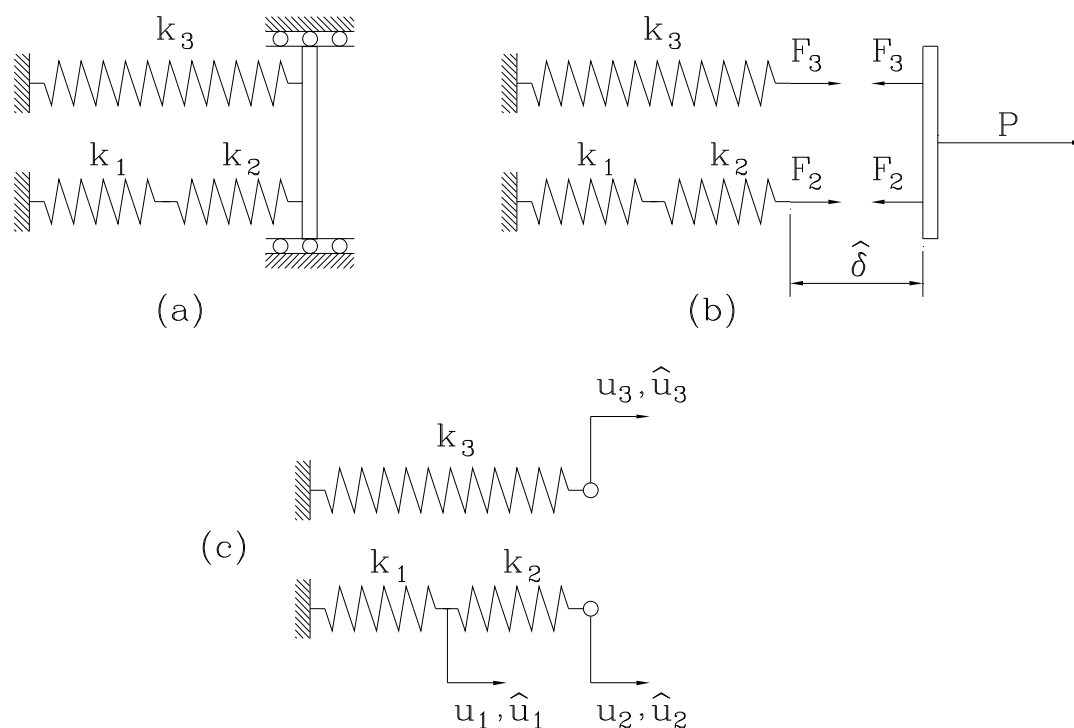


Figura 2.13: Sistema de molas paralelas.

Solução:

Pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, tem-se:

$$\hat{W}_{ext} = \hat{W}_{int} \quad \text{onde} \quad \hat{W}_{ext} = P \hat{\delta}$$

$$e \quad \hat{W}_{int} = F_2 (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) + F_1 \hat{u}_1 + F_3 \hat{u}_3$$

Utilizando o campo de deslocamento virtual compatível, $\hat{u}_2 = \hat{u}_3 = \hat{\delta}$ e $\hat{u}_1 \neq 0$, tem-se:

$$\hat{W}_{int} = F_2 (\hat{\delta} - \hat{u}_1) + F_1 \hat{u}_1 + F_3 \hat{\delta}$$

$$\text{ou,} \quad \hat{W}_{int} = (F_2 + F_3) \hat{\delta} + (F_1 - F_2) \hat{u}_1$$

As relações constitutivas das molas podem ser expressas por:

$$\frac{F_1}{k_1} = u_1 ; \quad \frac{F_2}{k_2} = (u_2 - u_1) \quad e \quad \frac{F_3}{k_3} = u_3$$

Portanto, o trabalho virtual interno pode ser re-escrito como:

$$\hat{W}_{int} = [k_2(u_2 - u_1) + k_3 u_3] \hat{\delta} + [k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1)] \hat{u}_1$$

Assim, o P.T.V. pode ser expresso como:

$$[k_2(u_2 - u_1) + k_3 u_3] \hat{\delta} + [k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1)] \hat{u}_1 = P \hat{\delta}$$

Como $\hat{\delta}$ e \hat{u}_1 são valores arbitrários quaisquer, independentes um do outro, para que o trabalho virtual interno seja igual ao trabalho virtual externo é necessário que:

$$\begin{aligned} k_2(u_2 - u_1) + k_3 u_3 &= P \\ k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) &= 0 \end{aligned}$$

impondo a condição de compatibilidade nos deslocamentos reais, $u_2 = u_3$, vem que:

$$\begin{aligned} k_2(u_2 - u_1) + k_3 u_2 &= P \\ k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) &= 0 \end{aligned}$$

Estas equações podem ser re-escritas como:

$$\begin{pmatrix} k_2 + k_3 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Resolvendo,

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \frac{P}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2} \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Substituindo os valores de u_2 e u_1 nas equações constitutivas, vem que:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{P}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2} \begin{pmatrix} k_1 k_2 \\ k_1 k_2 \\ k_3(k_1 + k_2) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Neste problema foi necessário usar as equações constitutivas uma vez que o mesmo é estaticamente indeterminado (hiperestático). Em problemas lineares, estaticamente indeterminados, são possíveis mais de uma configuração de equilíbrio, embora somente uma satisfaz as equações de equilíbrio e de compatibilidade simultaneamente. Observe que se k_1 ou k_2 for nulo, $F_3 = P$ e $F_2 = F_1 = 0$, enquanto que se $k_3 = 0$, então $F_3 = 0$ e $F_1 = F_2 = P$. No caso da rigidez equivalente das molas em série, k_1 e k_2 , ser igual a k_3 , i.e., $\frac{1}{k_3} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, as forças serão igualmente distribuídas nos apoios, ou seja, $F_1 = F_2 = F_3 = \frac{P}{2}$. Portanto, a força P é transmitida para o apoio pelo "caminho" de maior rigidez k .

■ **Exemplo 2.3.4** Utilizando campos de deslocamentos não-compatíveis determinar os deslocamentos dos nós do sistema de molas do exemplo 2.3.3.

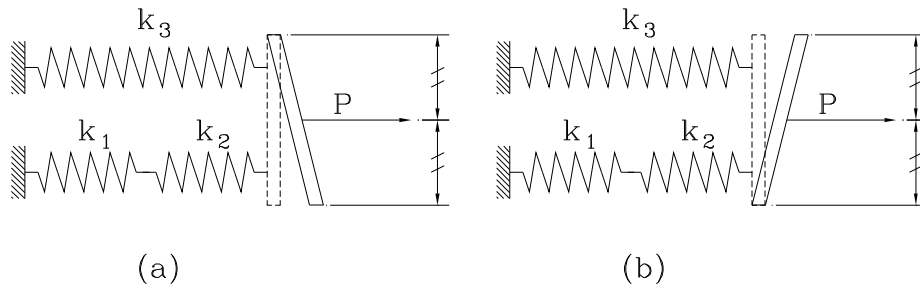


Figura 2.14: Sistema de molas paralelas com deslocamento virtual não-compatível.

Solução:

O trabalho virtual interno do sistema de molas da figura (2.13) pode ser genericamente expresso por (exemplo 2.3.4):

$$\hat{W}_{int} = k_2(u_2 - u_1) (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) + k_1 u_1 \hat{u}_1 + k_3 u_3 \hat{u}_3$$

e o trabalho virtual externo por:

$$\hat{W}_{ext} = P \hat{\delta}$$

Considere o campo de deslocamento virtual em que $\frac{\hat{u}_2}{2} = \hat{\delta}$ e $\hat{u}_1 = \hat{u}_3 = 0$ (figura 2.14.a.).

Pelo P.T.V.,

$$P \frac{\hat{u}_2}{2} = k_2(u_2 - u_1)\hat{u}_2$$

como \hat{u}_2 é qualquer,

$$k_2(u_2 - u_1) = \frac{P}{2} \quad (2.20)$$

Observe que no sistema real $u_2 = u_3$. Portanto, **o campo de deslocamento virtual utilizado acima é incompatível.**

Para um campo de deslocamento dado por $\hat{u}_1 \neq 0$, $\hat{u}_2 = \hat{u}_3 = 0$, os trabalhos virtuais, externo e interno, serão dados por:

$$\hat{W}_{ext} = P \hat{\delta} = 0$$

$$\hat{W}_{int} = k_2(u_2 - u_1)(\hat{u}_2 - \hat{u}_1) + k_1 u_1 \hat{u}_1 + k_3 u_3 \hat{u}_3$$

$$\text{ou,} \quad [-k_2 u_2 + (k_2 + k_1)u_1]\hat{u}_1 = 0$$

como \hat{u}_1 é qualquer,

$$-k_2 u_2 + (k_2 + k_1)u_1 = 0 \quad (2.21)$$

Por último, considere um campo de deslocamento dado por $\frac{\hat{u}_3}{2} = \hat{\delta}$, $\hat{u}_2 = \hat{u}_1 = 0$ (figura 2.14.b).

O trabalho virtual interno neste caso é dado por:

$$\hat{W}_{int} = k_3 u_3 \hat{u}_3$$

e o externo por:

$$\hat{W}_{ext} = P \hat{\delta}$$

Como $\hat{\delta} = \frac{\hat{u}_3}{2}$, pelo P.T.V. vem que:

$$P \frac{\hat{u}_3}{2} = k_3 u_3 \hat{u}_3$$

para \hat{u}_3 qualquer,

$$\frac{P}{2} = k_3 u_3 \tag{2.22}$$

Como no segundo **campo de deslocamento virtual** desse exemplo, este também é **incompatível** uma vez que $\hat{u}_3 \neq \hat{u}_2$.

As equações (2.20), (2.21) e (2.22) podem ser re-escritas como:

$$\begin{cases} k_2 u_2 - k_2 u_1 = \frac{P}{2} \\ -k_2 u_2 + (k_2 + k_1) u_1 = 0 \\ k_3 u_3 = \frac{P}{2} \end{cases} \tag{2.23}$$

Adicionando a primeira e a última equação, vem que:

$$\begin{cases} k_2 u_2 - k_2 u_1 + k_3 u_3 = P \\ -k_2 u_2 + (k_2 + k_1) u_1 = 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Impondo a condição de compatibilidade nos deslocamentos reais, $u_2 = u_3$, vem que:

$$\begin{pmatrix} k_2 + k_3 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.25}$$

Observe que a equação acima é a mesma equação obtida no exemplo 2.3.3.

A mesma solução pode ser obtida tanto com deslocamentos virtuais compatíveis como com deslocamentos virtuais incompatíveis. Assim, em geral, não é necessário que o campo de deslocamento virtual seja compatível.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais sempre gera as equações de equilíbrio do sistema, como pode ser observado nos exemplos apresentados. Para resolver estas equações, é necessário que as condições de compatibilidade do sistema de deslocamentos reais sejam satisfeitas. Em problemas hiperestáticos estas condições de compatibilidade permitem que o sistema de equações, obtido pelo P.T.V., tenha solução única. No exemplo 2.3.3, a solução para o sistema de equações (2.24) somente foi possível quando a condição de compatibilidade, $u_2 = u_3$, foi imposta. Portanto, para que exista unicidade de solução é necessário que as equações de compatibilidade (ou condição de contorno) do campo de deslocamentos reais sejam satisfeitas. Para solução em computadores, mesmo em problemas isostáticos, os deslocamentos devem ser restritos para evitar mecanismos de corpo rígido, os quais geram matrizes singulares que inviabilizam a solução do sistema.

Equação de compatibilidade de sistemas deformáveis podem ser obtidas através do Princípio do Trabalho Virtual Complementar, o qual será discutido nas seções seguintes.

2.4 Trabalho Virtual Complementar em Corpos Rígidos

Define-se Trabalho Virtual Complementar como sendo o trabalho realizado por um sistema de forças virtuais, auto-equilibrado, atuando em um campo de deslocamentos reais. Para desenvolver o princípio das forças virtuais considera-se, inicialmente, trabalhos virtuais complementares associados a sistemas de corpos rígidos, como no exemplo a seguir:

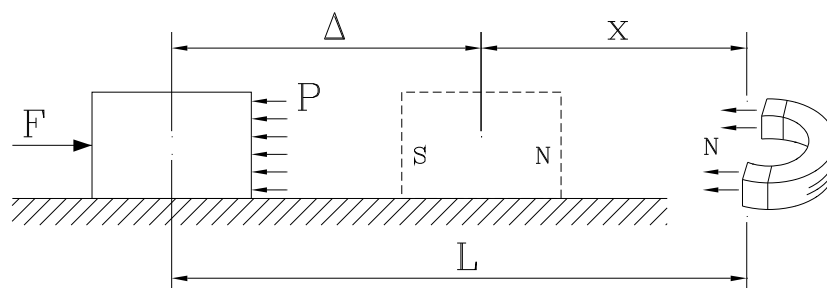


Figura 2.15: *Princípio do trabalho virtual complementar.*

Nesse exemplo, um bloco rígido imantado está sujeito à ação de um campo magnético,

sem forças de atrito, como ilustrado na figura (2.15). No bloco atuam a força externa F e a força magnética P . Supondo que o bloco assumirá a condição de repouso, após ter deslocado de Δ ⁶, e que sobre esse sistema atua um par de forças imaginárias auto-equilibradas, $\hat{F} = \hat{P}$, denota-se o trabalho virtual realizado por essas forças virtuais associadas ao deslocamento Δ como sendo o trabalho virtual complementar⁷, designado por \hat{W}^* . Então,

$$\hat{W}^* = \hat{P} \Delta - \hat{F} \Delta \quad \text{ou,} \quad \hat{W}^* = \hat{P} (l - x) - \hat{F} \Delta$$

Para P inversamente proporcional ao quadrado da distância x do magneto, i.e., $P = \frac{k}{x^2}$, onde k é um valor constante supostamente conhecido, o trabalho virtual complementar pode ser re-escrito como:

$$\hat{W}^* = \hat{P} \left(l - \sqrt{\frac{k}{P}} \right) - \hat{F} \Delta \quad (2.26)$$

O trabalho virtual complementar \hat{W}^* é nulo uma vez que \hat{P} e \hat{F} estão em equilíbrio. Portanto, substituindo \hat{P} por \hat{F} na expressão (2.26), tem-se:

$$0 = \hat{F} \left(l - \sqrt{\frac{k}{P}} \right) - \hat{F} \Delta \quad \text{ou,} \quad \hat{F} \left[\left(l - \sqrt{\frac{k}{P}} \right) - \Delta \right] = 0$$

como \hat{F} é arbitrário,

$$\Delta = l - \sqrt{\frac{k}{P}}$$

Se o bloco estiver em repouso, i.e. $F = P$, então o deslocamento deve satisfazer à condição

$$\Delta = l - \sqrt{\frac{k}{F}} \quad (2.27)$$

Note que ao contrário do princípio dos deslocamentos virtuais, a utilização de forças virtuais auto-equilibradas resulta em equação envolvendo deslocamentos reais. Assim,

⁶No instante em que $|P|$ se igualar ao $|F|$.

⁷O asterisco é utilizado para distingui-lo do trabalho virtual, o qual é realizado por forças reais, atuantes no sistema, associadas a deslocamento virtuais.

ao utilizar-se um sistema auto-equilibrado de forças virtuais na direção x , obtém-se a condição a ser satisfeita pelos deslocamentos nessa direção.

Similarmente, se um sistema auto equilibrado de forças virtuais atuar na direção normal ao plano em que o corpo rígido imantado se desloca, a condição trivial de deslocamento vertical nulo será obtida.

O princípio do trabalho virtual complementar para partículas e corpos rígidos pode ser enunciado como:

“Os deslocamentos reais de um sistema de partículas e/ou corpos rígidos ao procurar uma configuração de equilíbrio são tais que o trabalho virtual complementar é nulo para todo sistema auto-equilibrado de forças virtuais.”

Na seção seguinte estende-se o princípio do trabalho virtual complementar para corpos deformáveis.

2.5 Trabalho Virtual Complementar em corpos deformáveis

O princípio do trabalho virtual complementar para corpos deformáveis pode ser considerado como uma generalização do princípio do trabalho virtual complementar para corpos rígidos. Isto pode ser facilmente visualizado considerando-se um sistema de forças virtuais constituído de forças externas e internas. Uma vez que o trabalho virtual complementar total é nulo, tem-se:

$$\hat{W}^* = \hat{W}_{ext}^* - \hat{W}_{int}^* = 0 \quad (2.28)$$

onde \hat{W}_{ext}^* e \hat{W}_{int}^* são os trabalhos virtuais complementares externo e interno, respectivamente.

A expressão acima pode ser melhor interpretada com o auxílio da figura (2.16), onde uma mola de massa desprezível suporta uma massa rígida. Nesse caso, pode-se supor

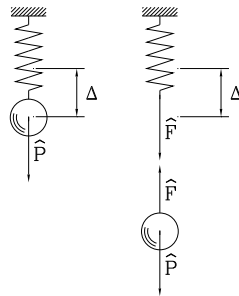


Figura 2.16: *Trabalho Virtual Complementar de um sistema massa-mola.*

que as forças virtuais $\hat{P} = \hat{F}$ estão atuando na massa antes da deformação da mola devido à ação da gravidade sobre a massa. Assim que a mola deforma, um deslocamento real Δ é induzido na massa. Como $\hat{P} = \hat{F}$ já estão atuando na massa, elas realizarão trabalho virtual complementar total nulo por que constituem um sistema de forças auto-equilibrado.

O trabalho virtual complementar externo pode ser expresso por:

$$\hat{W}_{ext}^* = \hat{P} \Delta \quad (2.29)$$

Similarmente, como indicado na figura (2.16), o trabalho virtual complementar interno é:

$$\hat{W}_{int}^* = \hat{F} \Delta_m \quad (2.30)$$

Observe que o trabalho virtual complementar interno positivo é o trabalho virtual realizado pela reação de \hat{F} na mola vezes o deslocamento real, Δ_m , da ponta da mola.

Considerando que $\hat{F} = \hat{P}$, $\Delta_m = \frac{mg}{k}$ e usando a equação (2.28), o trabalho virtual complementar pode ser re-escrito como:

$$\hat{F} \Delta = \hat{F} \left(\frac{mg}{k} \right)$$

onde m é a massa da mola, g a aceleração da gravidade e k a constante de rigidez da mola.

Assim,

$$\Delta = \Delta_m$$

que é a equação de compatibilidade do sistema.

Em resumo, pode-se dizer que no princípio do trabalho virtual, o uso de deslocamentos virtuais admissíveis, garantindo compatibilidade geométrica, conduzem às equação de movimento do sistema. Em contrapartida, o princípio do trabalho virtual complementar conduz às equações de compatibilidade, ou relação envolvendo os deslocamentos reais do sistema.

■ **Exemplo 2.5.1** Para o sistema de molas da figura (2.17), calcule o deslocamento nas direções u e v no ponto C , devido a uma força \vec{P} atuando na direção v .

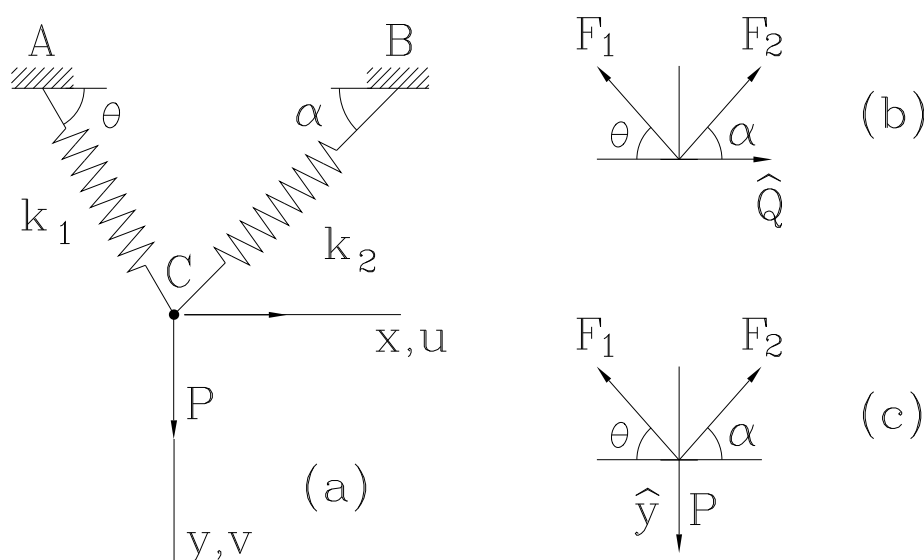


Figura 2.17: (a) Sistema de molas inclinadas. (b) Caso utilizado para determinar u . (c) Caso utilizado para determinar v .

Solução

(a) Cálculo de u em função de δ_1 e δ_2 .

Considere uma força externa virtual \hat{Q} atuando na direção de u (figura 2.17.b). Os trabalhos virtuais externo e interno podem ser expressos por:

$$\hat{W}_{ext}^* = \hat{Q} u$$

$$\hat{W}_{int}^* = \hat{F}_{1Q} \delta_1 + \hat{F}_{2Q} \delta_2$$

Para que o sistema de forças virtuais seja auto-equilibrado ($\sum F = 0$ e $\sum M = 0$).

$$\begin{aligned}\sum \hat{F}_x &= 0 \quad ; \quad -\hat{F}_{1Q} \cos \theta + \hat{F}_{2Q} \cos \alpha + \hat{Q} = 0 \\ \sum \hat{F}_y &= 0 \quad ; \quad \hat{F}_{1Q} \sin \theta + \hat{F}_{2Q} \sin \alpha = 0\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema,

$$\hat{F}_{1Q} = \frac{\hat{Q} \sin \alpha}{\sin(\alpha + \theta)} \quad e \quad \hat{F}_{2Q} = -\frac{\hat{Q} \sin \theta}{\sin(\alpha + \theta)}$$

A condição acima é necessária e suficiente para que as forças virtuais \hat{F}_{1Q} e \hat{F}_{2Q} sejam auto-equilibradas.

Utilizando o P.T.V.C. e substituindo as relações de equilíbrio do sistema virtual na expressão do trabalho virtual complementar, vem que:

$$\hat{Q}u = \frac{\hat{Q}(\sin \alpha)\delta_1}{\sin(\alpha + \theta)} - \frac{\hat{Q}(\sin \theta)\delta_2}{\sin(\alpha + \theta)}$$

como \hat{Q} é qualquer,

$$u = \frac{(\sin \alpha)\delta_1 - (\sin \theta)\delta_2}{\sin(\alpha + \theta)}$$

A relação acima é a relação de compatibilidade entre o deslocamento u e os deslocamentos nas extremidades das barras, δ_1 e δ_2 .

(b) Cálculo de v em função de δ_1 e δ_2 .

Considere uma força externa virtual \hat{P} atuando na direção de v (figura 2.17.c). Os trabalhos virtuais externo e interno podem ser expressos por:

$$\begin{aligned}\hat{W}_{ext}^* &= \hat{P} v \\ \hat{W}_{int}^* &= \hat{F}_{1P} \delta_1 + \hat{F}_{2P} \delta_2\end{aligned}$$

Para que o sistema de forças virtuais seja auto-equilibrado ($\sum F = 0$ e $\sum M = 0$).

$$\begin{aligned}\sum \hat{F}_x &= 0 \quad ; \quad -\hat{F}_{1P} \cos \theta + \hat{F}_{2P} \cos \alpha = 0 \\ \sum \hat{F}_y &= 0 \quad ; \quad \hat{F}_{1P} \sin \theta + \hat{F}_{2P} \sin \alpha = \hat{P}\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema,

$$\hat{F}_{1P} = \frac{\hat{p}\cos\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)} \quad e \quad \hat{F}_{2P} = \frac{\hat{p}\cos\theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

Utilizando o P.T.V.C. e substituindo as relações de equilíbrio do sistema virtual na expressão do trabalho virtual complementar, vem que:

$$\hat{P}v = \frac{\hat{P}(\cos\alpha)\delta_1}{\text{sen}(\alpha + \theta)} + \frac{\hat{P}(\cos\theta)\delta_2}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

como \hat{Q} é qualquer,

$$v = \frac{(\cos\alpha)\delta_1 + (\cos\theta)\delta_2}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

A relação acima é a relação de compatibilidade entre o deslocamento v e os deslocamentos nas extremidades das barras, δ_1 e δ_2 .

(c) Expressar u e v em função da carga externa P .

Até agora foram obtidas as relações de compatibilidade entre os deslocamentos do sistema pelo P.T.V.C.. Para expressar os deslocamentos u e v em função da carga externa P , utiliza-se as relações constitutivas e as equações de equilíbrio do sistema real, juntamente com as equações obtidas nos itens a e b resumidas a seguir.

Relação de Compatibilidade

$$\delta_1\cos\alpha + \delta_2\cos\theta = v\text{sen}(\alpha + \theta)$$

$$\delta_1\text{sen}\alpha - \delta_2\text{sen}\theta = u\text{sen}(\alpha + \theta)$$

Equilíbrio de forças do sistema real

$$-F_1\cos\theta + F_2\cos\alpha = 0$$

$$F_1\text{sen}\theta + F_2\text{sen}\alpha = P$$

resolvendo o sistema acima, vem que:

Equação de Equilíbrio

$$F_2 = \frac{P \cos \theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)} \quad e \quad F_1 = \frac{P \cos \alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

Relação Constitutivas

$$F_1 = k_1 \delta_1 \quad F_2 = k_2 \delta_2 \quad e \quad \delta_1 = \frac{F_1}{k_1} \quad \delta_2 = \frac{F_2}{k_2} \quad (2.31)$$

substituindo as equações de equilíbrio nas relações constitutivas,

$$\delta_1 = \frac{P \cos \alpha}{k_1 \text{sen}(\alpha + \theta)} \quad e \quad \delta_2 = \frac{P \cos \theta}{k_2 \text{sen}(\alpha + \theta)} \quad (2.32)$$

Finalmente, substituindo as equações (2.32) nas relações de compatibilidade vem que:

$$v = \frac{\left(\frac{\cos^2 \alpha}{k_1} + \frac{\cos^2 \theta}{k_2}\right) P}{\text{sen}^2(\alpha + \theta)} \quad e \quad u = \frac{\left(\frac{\cos \alpha \text{sen} \alpha}{k_1} - \frac{\cos \theta \text{sen} \theta}{k_2}\right) P}{\text{sen}^2(\alpha + \theta)}$$

Observe que o P.T.V.C. forneceu somente as relações de compatibilidade entre os deslocamentos, e que foram necessárias as equações de equilíbrio e as relações constitutivas para que os deslocamentos u e v pudessem ser expressos em função da carga externa aplicada P .

■ **Exemplo 2.5.2** Para o sistema de molas do exemplo 2.3.3, determinar as forças atuantes nas molas k_1 , k_2 e k_3 e o deslocamento δ na direção da carga aplicada, P_0 . Usar o princípio do trabalho virtual complementar, considerando que as relações constitutivas das molas sejam dadas por:

$$F_1 = k_1 \Delta \quad ; \quad F_2 = k_2 \Delta \quad ; \quad F_3 = k_3 \Delta$$

Solução

O trabalho virtual complementar interno pode ser escrito como:

$$\hat{W}_{int}^* = u_1 \hat{F}_1 + (u_2 - u_1) \hat{F}_2 + u_3 \hat{F}_3 \quad (2.33)$$

Para que o sistema de forças seja auto-equilibrado, é necessário que:

$$\hat{F}_1 = \hat{F}_2$$

$$\hat{F}_2 + \hat{F}_3 = \hat{P}$$

Assim, o \hat{W}_{int}^* pode ser re-escrito como:

$$\hat{W}_{int}^* = u_2 \hat{F}_2 + u_3 \hat{F}_3 \quad \text{ou,} \quad \hat{W}_{int}^* = u_2 (\hat{P} - \hat{F}_3) + u_3 \hat{F}_3$$

Já o trabalho virtual complementar externo pode ser escrito como:

$$\hat{W}_{ext}^* = \hat{P} \delta$$

Portanto, pelo princípio do trabalho virtual complementar, $\hat{W}_{ext}^* = \hat{W}_{int}^*$, vem que:

$$\hat{P} \delta = u_2 (\hat{P} - \hat{F}_3) + u_3 \hat{F}_3 \quad \text{ou,} \quad \hat{P}(u_2 - \delta) + \hat{F}_3(u_3 - u_2) = 0$$

Como \hat{F}_3 e \hat{P} são valores arbitrários quaisquer,

$$\delta = u_2 \quad \text{e} \quad u_2 = u_3 \quad (2.34)$$

As equações acima expressam a condição de compatibilidade de deslocamentos do sistema.

As equações de equilíbrio de forças do sistema real podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ F_2 + F_3 &= P \end{aligned} \quad (2.35)$$

As relações constitutivas, para esse caso, podem ser re-escritas como:

$$F_1 = K_1 u_1 ; \quad F_2 = K_2 (u_2 - u_1) ; \quad F_3 = K_3 u_3 \quad (2.36)$$

A solução deste problema pode ser obtida utilizando as relações de compatibilidade, equações (2.34), as equações de equilíbrio, equações (2.35), e as relações constitutivas, equações

(2.36). Ou seja, substituindo as equações constitutivas (2.36), na relação de compatibilidade ($u_2 = u_3$), vem que:

$$\frac{F_3}{K_3} = \frac{F_2}{K_2} + \frac{F_1}{K_1}$$

A equação acima juntamente com as equações de equilíbrio (2.35) constituem um sistema de 3 equações e 3 incógnitas. resolvendo esse sistema vem que:

$$F_1 = F_2 = \frac{K_1 K_2}{K_1 K_2 + K_3 (K_1 + K_2)} P$$

$$e, \quad F_3 = \left(1 - \frac{K_1 K_2}{K_1 K_2 + K_3 (K_1 + K_2)} \right) P$$

Substituindo as relações constitutivas (2.36), na relação de compatibilidade $\delta = u_2$ vem que:

$$\delta = \frac{P}{\left(K_3 + \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \right)}$$

■ **Exemplo 2.5.3** Resolva o problema 2.5.2 considerando que as relações constitutivas das molas sejam dadas por:

$$F_1 = k_1 \Delta^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad F_2 = k_2 \Delta^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad F_3 = k_3 \Delta \quad (2.37)$$

Solução

Os trabalhos virtuais complementares, interno e externo, podem ser expressos como:

$$\hat{W}_{int}^* = u_1 \hat{F}_1 + (u_2 - u_1) \hat{F}_2 + u_3 \hat{F}_3 \quad (2.38)$$

$$\hat{W}_{int}^* = \hat{P} \delta \quad (2.39)$$

Substituindo as equações constitutivas (2.37) nas expressões do trabalho virtual interno, (2.38), vem que:

$$\hat{W}_{int}^* = \left(\frac{F_1}{k_1} \right)^2 \hat{F}_1 + \left(\frac{F_2}{k_2} \right)^2 \hat{F}_2 + \left(\frac{F_3}{k_3} \right) \hat{F}_3 \quad (2.40)$$

Pelo P.T.V.C.,

$$\left(\frac{F_1}{k_1}\right)^2 \hat{F}_1 + \left(\frac{F_2}{k_2}\right)^2 \hat{F}_2 + \left(\frac{F_3}{k_3}\right) \hat{F}_3 = \hat{P} \delta$$

Além dos sistemas auto-equilibrados do exemplo anterior, outros possíveis sistemas auto-equilibrados de forças virtuais, podem ser:

$$\hat{F}_3 = 0 \quad \hat{F}_1 = \hat{F}_2 = \hat{P} \quad \text{ou,} \quad \hat{F}_1 = \hat{F}_2 = 0 ; \quad \hat{F}_3 = \hat{P} \quad (2.41)$$

Isto somente ocorre em sistemas estaticamente não determinados (hiperestáticos).

Para o primeiro sistema virtual, ou seja, $\hat{F}_3 = 0$ e $\hat{F}_1 = \hat{F}_2 = \hat{P}$, tem-se:

$$\left[\left(\frac{F_1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{k_2}\right)^2 \right] \hat{F}_2 = \delta \hat{F}_2 \quad \text{então,} \quad \delta = u_2$$

Para o segundo sistema virtual, i.e., $\hat{F}_1 = \hat{F}_2 = 0$ e $\hat{F}_3 = \hat{P}$, vem que:

$$\left(\frac{F_3}{k_3}\right) \hat{F}_3 = \delta \hat{F}_3 \quad \text{então,} \quad \delta = u_3$$

Podemos concluir que:

$$u_2 = u_3$$

Como \hat{F}_2 e \hat{F}_3 são arbitrários,

$$\begin{aligned} \left(\frac{F_1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{k_2}\right)^2 &= \delta \\ \left(\frac{F_3}{k_3}\right) &= \delta \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{F_1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{k_2}\right)^2 - \frac{F_3}{k_3} = 0 \quad (2.42)$$

O equilíbrio de forças no sistema real é dado por:

$$F_1 = F_2 \quad (2.43)$$

$$F_2 + F_3 = P \quad (2.44)$$

Usando as equações de equilíbrio (2.43) e (2.44) e a equação de compatibilidade (2.42) pode-se, finalmente, obter os valores de F_1 , F_2 e F_3 , ou seja:

$$F_1 = F_2 = \frac{-k_1^2 k_2^2 \pm \sqrt{(k_1 k_2)^4 + 4k_1^2 k_2^2 k_3 (k_1^2 + k_2^2)} P}{2(k_1^2 + k_2^2) k_3}$$

e,

$$F_3 = F_2 - P$$

Embora tenham sido utilizadas sistemas de forças virtuais auto-equilibradas, diferente do exemplo anterior, as equações de compatibilidade obtidas são equivalentes.

é importante observar que \hat{Q} e \hat{F} permanecem constantes durante o deslocamento real Δ , o que não ocorre com as forças reais atuantes no sistema. Para sistemas elásticos lineares, por exemplo, as forças reais variam linearmente com o módulo do deslocamento Δ . O fato das forças virtuais serem independentes dos deslocamentos reais, permite que o princípio do trabalho virtual complementar seja independente das relações constitutivas do material. Resultado similar pode ser obtido para o caso dos deslocamentos virtuais. Portanto, os princípios do trabalho virtual e trabalho virtual complementar são independentes das leis constitutivas e podem ser amplamente utilizados em problemas lineares, não-lineares e até mesmo nos casos em que não exista conservação de energia do sistema, uma vez que não é necessário o conceito de energia para se estabelecer esses princípios.

Sumário

Os princípios dos trabalhos virtuais podem ser esquematicamente representados nas figuras seguintes:

P.T.V.

$$P \cdot \hat{\Delta} = \underbrace{\sum F \cdot \hat{u}}_{\text{virtual}}$$

Deslocamentos virtuais \Rightarrow Equação de movimento (Equilíbrio de forças para os sistemas em repouso).

P.T.V.C.

$$\underbrace{\hat{P} \cdot \Delta}_{\text{virtual}} = \sum \hat{F} \cdot u$$

Forças virtuais (auto-equilibradas) \Rightarrow equações relacionando os deslocamentos reais do sistema (equações de compatibilidade).

onde,

P \rightarrow Forças externas;

F \rightarrow Forças internas;

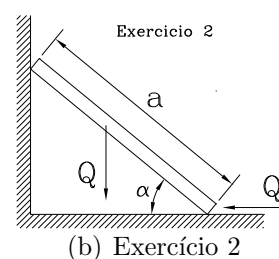
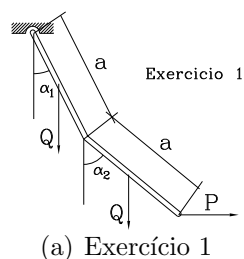
Δ \rightarrow Deslocamento externo;

u \rightarrow Deslocamento interno;

Na seção seguinte, define-se os trabalhos virtual e virtual complementar em meios contínuos, os quais serão utilizados na solução de sistema estruturais em geral.

Exercícios

1 - As duas barras rígidas abaixo são conectadas por rótulas sem atrito. Cada barra possui comprimento a e peso Q . Utilizando o princípio dos deslocamentos virtuais, determine os valores dos ângulos α_1 e α_2 correspondentes à configuração de equilíbrio. 2 - Uma barra



rígida de comprimento a de peso Q apoia-se sobre paredes sem atrito, como mostrado. Use deslocamentos virtuais para calcular o ângulo α para o qual estará em equilíbrio e as forças reativas nas extremidades das barras.

3 a 6 - Determine as configurações de equilíbrio das barras rígidas mostradas abaixo usando o princípio dos deslocamentos virtuais. Em cada caso, despreze o atrito e considere que cada barra tem um peso Q . 7 - Para o sistema de molas indicado na figura abaixo,

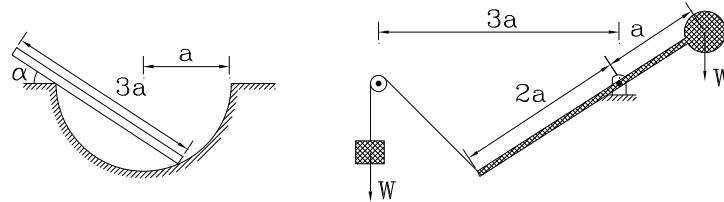


Figura 2.18: Figuras para exercícios 3 e 4.

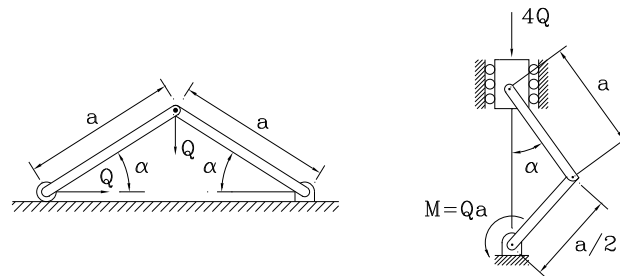
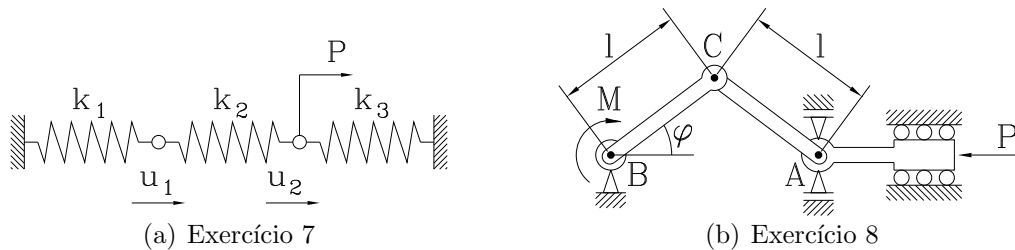


Figura 2.19: Figuras para exercícios 5 e 6.

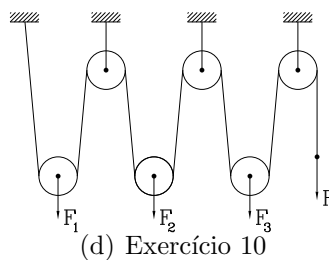
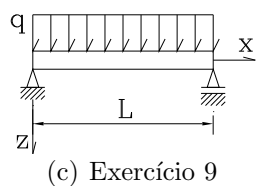
determine o deslocamento u_2 pelo princípio dos trabalhos virtuais. Considere que as equações constitutivas das molas sejam dadas por : $F_1 = K_1 \sqrt{\Delta_1}$; $F_2 = K_2 \sqrt{\Delta_2}$; $F_3 = K_3 \Delta_3$ 8 - Determinar o momento M em B tal que o mecanismo da figura esteja



em repouso. Usar o princípio dos trabalhos virtuais, desprezando os possíveis atritos. (Utilizar somente deslocamentos virtuais compatíveis)

9 - Achar, pelo princípio dos trabalhos virtuais, a expressão do esforço de flexão de uma viga AB , simplesmente apoiada, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído q .

10 - Para a figura abaixo, determinar as relações entre as forças F_1 , F_2 , F_3 e F_4 , usando



o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

11 - Utilizando o P.T.V., determinar a relação de redução de forças, $\frac{F_1}{F_2}$, para os sistemas indicados nas figuras abaixo.

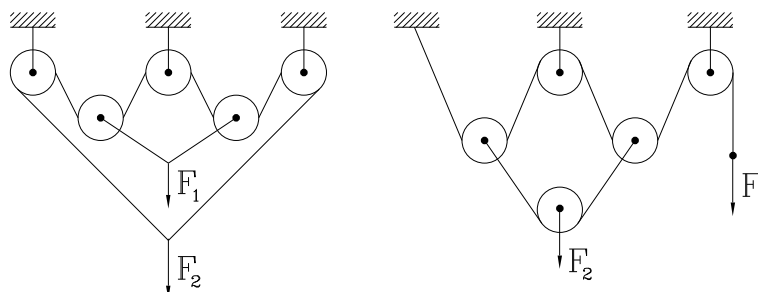


Figura 2.20: Figuras do exercício 11

12 - Mostre, pelo princípio do trabalho virtual, que para o sistema de molas da figura (2.21), $F = k_{eq} u_3$ onde

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}}$$

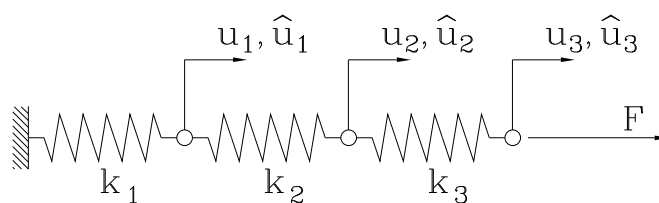


Figura 2.21: Sistema de três molas em série.

2.6 Trabalhos Virtuais em Sistemas Estruturais de Barras

A partir das expressões gerais do trabalho virtual e trabalho virtual complementar, pode-se desenvolver expressões para os trabalhos virtuais no interior de corpos deformáveis. Assim, o trabalho virtual interno pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\hat{W}_{int} &= \int_V [\sigma_{xx}\hat{\varepsilon}_{xx} + \sigma_{yy}\hat{\varepsilon}_{yy} + \sigma_{zz}\hat{\varepsilon}_{zz} + 2\sigma_{xz}\hat{\varepsilon}_{xz} + 2\sigma_{xy}\hat{\varepsilon}_{xy} + 2\sigma_{yz}\hat{\varepsilon}_{yz}] dV \\ \hat{W}_{int}^* &= \int_V [\hat{\sigma}_{xx}\varepsilon_{xx} + \hat{\sigma}_{yy}\varepsilon_{yy} + \hat{\sigma}_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\hat{\sigma}_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\hat{\sigma}_{xz}\varepsilon_{xz} + 2\hat{\sigma}_{yz}\varepsilon_{yz}] dV\end{aligned}\quad (2.45)$$

onde, na expressão acima, os termos com acento circunflexo representam componentes virtuais de tensão e deformação. Os superescritos, ⁰, indicam componentes de tensão ou deformação iniciais enquanto que o superescrito, ^T, é utilizado para identificar componentes de tensão e/ou deformação de origem térmica.

2.6.1 Treliças

Em treliças, a única componente do tensor de tensões atuante na seção normal ao eixo da barra é a componente normal. Portanto, para barras tracionadas ou comprimidas na direção x , o tensor de tensão e deformação podem ser representados por:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{xx} \end{bmatrix}\quad (2.46)$$

Assim, a expressão do trabalho virtual interno é dada por:

$$\hat{W}_{int} = \int_V \sigma_{xx}\hat{\varepsilon}_{xx} dV\quad (2.47)$$

onde a componente de tensão normal σ_{xx} , atuante na seção transversal, pode ser expressa por:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} - E\varepsilon_{xx}^0 - E\alpha \Delta T$$

Escrevendo a deformação virtual em termos de deslocamentos, $\hat{\varepsilon}_{xx} = \hat{u}_{,x}$, na expressão do trabalho virtual interno, tem-se:

$$\hat{W}_{int} = \int_V E u_{,x} \hat{u}_{,x} dV - \int_V E \varepsilon_{xx}^0 \hat{u}_{,x} dV - \int_V E \alpha \Delta T \hat{u}_{,x} dV$$

como $\hat{u}_{,x}$ e $u_{,x}$ são função apenas de x , segue que:

$$\hat{W}_{int} = \int_0^l \left\{ u_{,x} \hat{u}_{,x} \int_A E dy dz - \int_A E \varepsilon_{xx}^0 dy dz \hat{u}_{,x} - \int_A E \alpha \Delta T dy dz \hat{u}_{,x} \right\} dx$$

Supondo que o módulo de elasticidade, E , seja homogêneo na área da seção transversal, o trabalho virtual interno pode ser re-escrito como:

$$\hat{W}_{int} = \int_0^l \left\{ EA u_{,x} \hat{u}_{,x} - \hat{\varepsilon}^0 \hat{u}_{,x} - \hat{\varepsilon}^T \hat{u}_{,x} \right\} dx \quad (2.48)$$

onde,

$$\hat{\varepsilon}^0 = \int_A E \varepsilon_{xx}^0 dy dz \quad \text{e} \quad \hat{\varepsilon}^T = \int_A E \alpha \Delta T dy dz \quad (2.49)$$

A seguir desenvolve-se a expressão do trabalho virtual complementar para treliças. Nesse caso, o efeito de Poisson causa o aparecimento de componentes normais de deformação nas direções y e z , devido a existência da componente normal de tensão na direção x . Para que não ocorra trabalho virtual complementar nas direções y e z , serão escolhidas componentes de tensão virtuais auto-equilibradas tais que $\hat{\sigma}_{yy} = \hat{\sigma}_{zz} = 0$.

Portanto, o trabalho virtual complementar interno pode ser expresso como:

$$\hat{W}_{int}^* = \int_V \hat{\sigma}_{xx} \varepsilon_{xx} dV$$

Para $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, a componente ε_{xx} do tensor de deformação pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \varepsilon_{xx}^0 + \alpha \Delta T \quad (2.50)$$

Então,

$$\hat{W}_{int}^* = \int_V \left(\frac{\sigma_{xx}}{E} + \varepsilon_{xx}^0 + \alpha \Delta T \right) \hat{\sigma}_{xx} dV$$

No caso de barras solicitadas por tração,

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A}$$

Supondo componentes de tensão virtuais tais que $\hat{\sigma}_{xx} = \frac{\hat{N}}{A}$, o trabalho virtual complementar no interior da barra pode ser expresso como:

$$\hat{W}_{int}^* = \int^V \frac{\hat{N}}{A} \frac{N}{EA} dV + \int^V \frac{\hat{N}}{A} \varepsilon_{xx}^0 dV + \int^V \frac{\hat{N}}{A} \alpha \Delta T dV$$

Para barras de seção transversal homogênea tem-se:

$$\hat{W}_{int}^* = \int_0^l \left\{ \frac{\hat{N} N}{EA} + \frac{\hat{N} N^0}{EA} + \frac{\hat{N} N^T}{EA} \right\} dx$$

onde,

$$N^T = \int_A E \alpha \Delta T dy dz$$

$$N^0 = \int_A E \varepsilon_{xx}^0 dy dz$$

Observe que para o trabalho virtual interno complementar, \hat{W}_{int}^* , ser expresso em função dos esforços solicitantes, N , e da constante elástica, E , foram utilizadas a relação constitutiva expressa pela equação (2.50), e a equação de equilíbrio de forças do sistema real que relaciona a tensão σ_{xx} ao esforço real N .

2.6.2 Vigas

No caso de vigas, o tensor de tensão pode genericamente ser representado por:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Portanto, o trabalho virtual e o trabalho virtual complementar podem ser expressos por:

$$\hat{W}_{int} = \int_V (\sigma_{xx} \hat{\varepsilon}_{xx}) dV + \int_V (2\sigma_{xz} \hat{\varepsilon}_{xz}) dV$$

$$\hat{W}_{int}^* = \int_V (\hat{\sigma}_{xx} \varepsilon_{xx}) dV + \int_V (2\hat{\sigma}_{xz} \varepsilon_{xz}) dV$$

A componente de tensão normal atuante na seção transversal é dada por:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} - E\varepsilon_{xx}^0 - E\alpha\Delta T$$

onde,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{z}{\rho} = -zw_{,xx}$$

Assim,

$$\sigma_{xx} = -Ezw_{,xx} - E\varepsilon_{xx}^0 - E\alpha\Delta T$$

As componentes de tensão de cisalhamento são representadas por:

$$\sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} - 2G\varepsilon_{xz}^0$$

Embora ε_{xz} varie ao longo da seção transversal, é conveniente considerá-la constante na seção, ou seja:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\beta(x, y) = \frac{1}{2}k\beta(x)$$

onde k é um fator de correção de distribuição de cisalhamento e $\beta(x)$ representa a distorção da seção devido ao cisalhamento.

Assim, a componente de tensão de cisalhamento na seção transversal ⁸ pode ser re-escrita como:

$$\sigma_{xz} = Gk\beta(x) - G\gamma_{xz}^0$$

Adotando $\hat{\varepsilon}_{xx} = -z\hat{w}_{,xx}$, $\hat{\varepsilon}_{xz} = \hat{\beta}(x)$, e substituindo na expressão do trabalho virtual, segue que:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{int} &= \int_V (Ez^2w_{,xx}\hat{w}_{,xx} + E\varepsilon_{xx}^0z\hat{w}_{,xx} + E\alpha\Delta Tz\hat{w}_{,xx}) dV \\ &+ \int_V (Gk\beta(x)\hat{\beta}(x) - G\gamma_{xz}^0\hat{\beta}(x)) dV \end{aligned}$$

⁸Timoshenko, S.P, "On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibration of Prismatic Bars," Philosophical Magazine, vol. 41, 1921, pp. 733-746

ou,

$$\begin{aligned}\hat{W}_{int} &= \int_0^l [EIw_{,xx}\hat{w}_{,xx} + M^0\hat{w}_{,xx} + M^T\hat{w}_{,xx}] dx \\ &+ \int_0^l [Gk\beta(x)\hat{\beta}(x) - V^0\hat{\beta}(x)] dx\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}M^0 &= \int_A E\varepsilon_{xx}^0 z dA \\ M^T &= \int_A E\alpha\Delta T z dA \\ V^0 &= \int_A G\gamma_{xz}^0 dA\end{aligned}$$

A expressão acima representa o trabalho virtual interno em vigas.

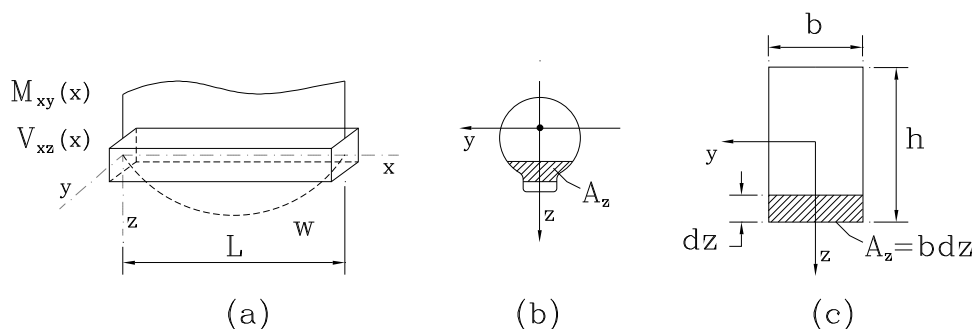


Figura 2.22: (a) Linha elástica, Momento de flexão e esforço cortante ao longo de uma viga. (b) Momento estático em vigas de seção transversal qualquer da viga. (c) Momento estático em viga de seção retangular.

O trabalho virtual complementar pode ser expresso em função dos esforços solicitantes, ou seja, os momentos de flexão e esforços cortantes. Para vigas sujeitas a carregamentos distribuídos, as tensões normais e de cisalhamento são expressas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} = \frac{M_y z}{I_{yy}} \\ \sigma_{xz} &= \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{xz} = -\frac{V_{xz} Q_y}{I_{yy} b}\end{aligned}$$

onde M_y é o momento flexão; V_{xz} , a força cortante na direção z atuando na área de direção normal x ; $Q_y = \int_{A_z} z dy dz$ é o momento estático (função da geometria da seção transversal) ; b , a largura da seção na direção y e I_{yy} é o momento de inércia.

Admitindo tensões virtuais auto-equilibradas similares às tensões reais, vem que:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{xx} &= \frac{\hat{M}_y z}{I_{yy}} \\ \hat{\sigma}_{xz} &= -\frac{\hat{V}_{xz} Q_y}{I_{yy} b}\end{aligned}$$

Assim, a expressão para o trabalho virtual complementar será:

$$\begin{aligned}\hat{W}_{int}^* &= \int_V \left(\frac{\hat{M}_y z}{I_{yy}} \frac{M_y z}{EI_{yy}} + \frac{\hat{M}_y z}{I_{yy}} \varepsilon_{xx}^0 + \frac{\hat{M}_y z}{I_{yy}} \alpha T \right) dV \\ &+ \int_V \left(2 \frac{\hat{V}_{xz} Q_y}{I_{yy} b} \frac{(1+\nu)}{E} \frac{V_{xz} Q_y}{I_{yy} b} - 2 \frac{\hat{V}_{xz} Q_y}{I_{yy} b} \varepsilon_{xz}^0 \right) dV\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\hat{W}_{int}^* &= \int_0^l \left(\frac{\hat{M}_y M_y}{EI_{yy}} + \frac{\hat{M}_y M_y^0}{I_{yy}} + \frac{\hat{M}_y M_y^T}{I_{yy}} \right) dx \\ &+ \int_0^l \frac{(1+\nu)}{E} \left(\frac{\hat{V}_{xz} V_{xz}}{A} \chi_z - 2\sqrt{\chi_z} \hat{V}_{xz} V_{xz}^0 \right) dx\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}M_y^T &= \int_A z \alpha T dy dz \\ M_y^0 &= \int_A z \varepsilon_{xx}^0 dy dz \\ V_{xz}^0 &= \int_A \frac{E}{1+\nu} \frac{A}{I_{yy}} \frac{\varepsilon_{xz}^0 Q_y}{b} dy dz \\ \chi_z &= \frac{A}{I_{yy}^2} \int_A \frac{Q_y^2}{b^2} dy dz\end{aligned}$$

2.6.3 Barras solicitadas por torção

Embora inicialmente considere-se barras de seção circular, essa formulação pode ser facilmente estendida para barras prismáticas de seção quaisquer.

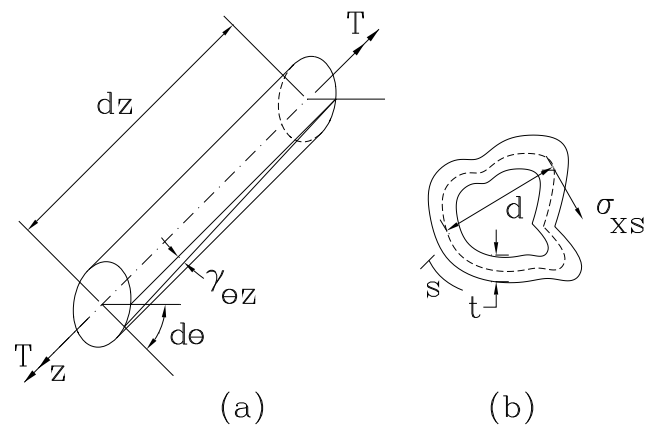


Figura 2.23: (a) Barra de seção circular submetida a esforço de torção. (b) Torção em barra de seção qualquer.

Para barras de seção circular, a expressão do trabalho virtual interno pode ser escrito, em coordenadas polares, como segue:

$$\hat{W}_{int} = \int_V [2\sigma_{\theta z} \hat{\varepsilon}_{\theta z}] dV$$

onde,

$$\sigma_{\theta z} = 2G\varepsilon_{\theta z} - 2G\varepsilon_{\theta z}^0$$

e
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

A componente de deformação de cisalhamento, $\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\gamma_{\theta z}$, na torção de barras circulares, figura (2.23), é dada por:

$$\gamma_{\theta z} dz = r d\theta \Rightarrow \varepsilon_{\theta z} = \frac{r}{2} \frac{d\theta}{dz}$$

Portanto,

$$\sigma_{\theta z} = G r \frac{d\theta}{dz} - 2G\varepsilon_{\theta z}^0$$

A deformação virtual também pode ser expressa em termos do ângulo de rotação da seção, ou seja:

$$\hat{\varepsilon}_{\theta z} = \frac{r}{2} \frac{d\hat{\theta}}{dz}$$

Assim, o trabalho virtual interno pode ser re-escrito como:

$$\hat{W}_{int} = \int_V \left[2G \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dz} \frac{d\hat{\theta}}{dz} - G (2\varepsilon_{\theta z}^0 r \frac{d\hat{\theta}}{dz}) \right] dV$$

ou,

$$\hat{W}_{int} = \int_0^l \left[G J \left(\frac{d\theta}{dz} \frac{d\hat{\theta}}{dz} \right) - T^0 \frac{d\hat{\theta}}{dz} \right] dz$$

onde,

$$J = \int_A r^2 dA$$

$$T^0 = \int_A G \gamma_{\theta z}^0 r dA$$

Pode-se demonstrar⁹, para outras formas de seção transversais, que o trabalho virtual interno em barras solicitadas por torção é genericamente expresso por:

$$\hat{W}_{int} = \int_0^l \left[(G J^*) \frac{d\theta}{dz} \frac{d\hat{\theta}}{dz} \right] dz$$

onde

$$J^* = \begin{cases} \int_A r^2 dA & \text{Seção Circular;} \\ \frac{4A_p^2}{\oint \frac{ds}{t}} & \text{Seção Fechada de parede fina;} \\ \approx \frac{1}{3} \int_0^b t^3(\xi) d\xi = \frac{bt^3}{3} & \text{Seção Aberta de parede fina.} \end{cases}$$

As componentes de tensão de cisalhamento na torção de barras de seção circular são dadas por:

$$\sigma_{\theta z} = \frac{Tr}{J} \quad , \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{(1+\nu)}{E} \frac{\hat{T}r}{J} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\sigma_{\theta z}}{2G} + \varepsilon_{\theta z}^0$$

Como o trabalho virtual complementar em coordenadas polares é expresso por:

$$\hat{W}_{int}^* = \int_V [2\hat{\sigma}_{\theta z} \varepsilon_{\theta z}] dV$$

⁹Rivello, R.M., "Theory and Analysis of Flight Structures", McGraw-Hill, 1969.

tem-se:

$$\hat{W}_{int}^* = \int_V \left[\frac{(1 + \nu)}{E} \left(\frac{T_r}{J} \frac{\hat{T}r}{J} \right) + 2 \frac{(1 + \nu)}{E} \frac{\hat{T}r}{J} \varepsilon_{\theta z}^0 \right] dV$$

ou,

$$\hat{W}_{int}^* = \int_0^l \frac{(1 + \nu)}{EJ} [T \hat{T} + 2T^0 \hat{T}] dz \tag{2.52}$$

onde o momento de inércia J foi definido acima e

$$T^0 = \int_A \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{\theta z}^0 r dA$$

■ **Exemplo 2.6.1** (a) Dada a treliça da figura (2.24.a), determine os esforços nas barras 1, 2 e 3. (b) Fazendo A_2 tender a zero, determine os esforços nas barras 1 e 3.

Solução. (item a)

Considere um deslocamento real $\hat{\Delta}x$ positivo para a direita. Para cada barra, os deslocamentos axiais, figura (2.24.b), são dados por:

$$\delta_{1x} = \Delta x \text{sen}(\theta)$$

$$\delta_{2x} = \Delta x$$

$$\delta_{3x} = \Delta x \text{sen}(\theta)$$

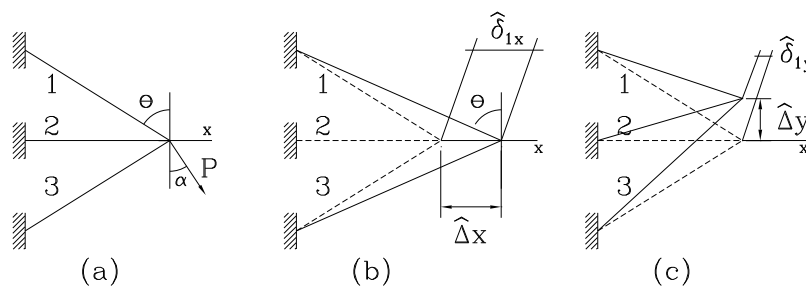


Figura 2.24: Aplicação do P.T.V em treliças.

Para um deslocamento real Δy , figura (2.24.c), os deslocamentos reais correspondentes em cada barra são:

$$\delta_{1y} = -\Delta y \cos(\theta)$$

$$\delta_{2y} = 0$$

$$\delta_{3y} = \Delta y \cos(\theta)$$

O deslocamento de cada barra será dado pela soma vetorial dos deslocamentos em cada direção, $\Delta = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$, ou seja,

$$\delta_1 = \Delta x \sin(\theta) - \Delta y \cos(\theta)$$

$$\delta_2 = \Delta x$$

$$\delta_3 = \Delta x \sin(\theta) + \Delta y \cos(\theta)$$

Pelo princípio dos trabalhos virtuais, equação (2.48), desconsiderando as deformações iniciais e efeitos de variação de temperatura, tem-se:

$$\hat{W}_{int} = \int_0^l \{EAu_{,x}\hat{u}_{,x}\} dx \quad e, \quad \hat{W}_{ext} = P \hat{\Delta}$$

Considerando E , A e l constantes ao longo de cada barra, pode-se reescrever a expressão do trabalho virtual interno como:

$$\hat{W}_{int} = \sum_{i=1}^n \frac{E_i A_i}{l_i} \delta_i \hat{\delta}_i$$

Serão considerados deslocamentos virtuais compatíveis, que satisfazem as condição de continuidade no interior das barras, e as condição de contorno nas extremidades, i.e., deslocamentos nulos nos apoios, obedecendo as condição de conectividade das barras no nó. Para assegurar as condição de compatibilidade no nó, os deslocamentos $\hat{\Delta}x$, na direção x , e $\hat{\Delta}y$, na direção y , devem satisfazer as condição abaixo.

$$\hat{\delta}_{1x} = \hat{\Delta}x \sin(\theta) \quad ; \quad \hat{\delta}_{2x} = \hat{\Delta}x \quad e \quad \hat{\delta}_{3x} = \hat{\Delta}x \sin(\theta)$$

$$e \quad \hat{\delta}_{1y} = -\hat{\Delta}y \cos(\theta) \quad ; \quad \hat{\delta}_{2y} = 0 \quad e \quad \hat{\delta}_{3y} = \hat{\Delta}y \cos(\theta)$$

Utilizando o P.T.V. para o deslocamento virtual $\Delta\hat{x}$, e considerando que $\hat{W}_{ext} = Psen(\alpha)\hat{\Delta}_x$, vem que:

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}x(Psen(\alpha)) &= \frac{E_1A_1}{l_1}[\Delta xsen(\theta) - \Delta ycos(\theta)](\hat{\Delta}xsen(\theta)) + \\ &+ \frac{E_2A_2}{l_2}(\Delta x)(\hat{\Delta}x) + \\ &+ \frac{E_3A_3}{l_3}[\Delta xsen(\theta) + \Delta ycos(\theta)](\hat{\Delta}xsen(\theta))\end{aligned}$$

como $\hat{\Delta}x$ é qualquer, a expressão simplifica para:

$$\begin{aligned}Psen(\alpha) &= \frac{E_1A_1}{l_1}[\Delta xsen^2(\theta) - \Delta ycos(\theta)(sen(\theta))] + \\ &+ \frac{E_2A_2}{l_2}(\Delta x) + \\ &+ \frac{E_3A_3}{l_3}[\Delta xsen^2(\theta) + \Delta ycos(\theta)(sen(\theta))]\end{aligned}$$

Para o deslocamento virtual na direção y , o P.T.V. pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}y(-Pcos(\alpha)) &= \frac{E_1A_1}{l_1}[\Delta xsen(\theta) - \Delta ycos(\theta)](-\hat{\Delta}ycos(\theta)) + \\ &+ \frac{E_2A_2}{l_2}(\Delta x)(0) + \\ &+ \frac{E_3A_3}{l_3}[\Delta xsen(\theta) + \Delta ycos(\theta)](\hat{\Delta}ycos(\theta))\end{aligned}$$

como $\hat{\Delta}y$ é qualquer, tem-se:

$$\begin{aligned}-Pcos(\alpha) &= \frac{E_1A_1}{l_1}[-\Delta xsen(\theta)cos(\theta) + \Delta ycos^2(\theta)] \\ &+ \frac{E_3A_3}{l_3}[\Delta xsen(\theta)cos(\theta) + \Delta ycos^2(\theta)]\end{aligned}$$

Reagrupando os termos em ambas equações, tem-se:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{E_1A_1}{l_1}sen^2(\theta) + \frac{E_2A_2}{l_2} + \frac{E_3A_3}{l_3}sen^2(\theta) \right] \Delta x + \\ &\left[-\frac{E_1A_1}{l_1}sen(\theta)cos(\theta) + \frac{E_3A_3}{l_3}sen(\theta)cos(\theta) \right] \Delta y = Psen(\alpha) \\ &\left[-\frac{E_1A_1}{l_1}sen(\theta)cos(\theta) + \frac{E_3A_3}{l_3}sen(\theta)cos(\theta) \right] \Delta x + \\ &\left[\frac{E_1A_1}{l_1}cos^2(\theta) + \frac{E_3A_3}{l_3}cos^2(\theta) \right] \Delta y = -Pcos(\alpha)\end{aligned}$$

As equações acima podem ser representadas matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{E_1 A_1}{l_1} \text{sen}^2(\theta) + \frac{E_2 A_2}{l_2} + \frac{E_3 A_3}{l_3} \text{sen}^2(\theta) \right) \\ \left(-\frac{E_1 A_1}{l_1} \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + \frac{E_3 A_3}{l_3} \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \right) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{E_1 A_1}{l_1} \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + \frac{E_3 A_3}{l_3} \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \right) \\ \left(\frac{E_1 A_1}{l_1} \cos^2(\theta) + \frac{E_3 A_3}{l_3} \cos^2(\theta) \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \text{sen}(\alpha) \\ -P \cos(\alpha) \end{Bmatrix}$$

ou, genericamente por:

$$[K] \cdot \{u\} = \{f\}$$

onde $[k]$ é a matriz de rigidez, $[u]$ o vetor de deslocamentos e $[f]$ o vetor de forças.

Solução. (item b)

Para $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $A_2 = 0$; $A_1 = A_3 = A$; $E_1 = E_2 = E_3 = E$ e $\alpha = 0$, a figura (2.24) se transforma em:

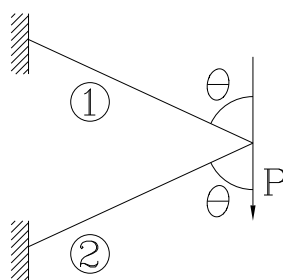
no item anterior obteve-se a relação $[K] \cdot \{u\} = \{f\}$, que expandida fornece a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{E_1 A_1}{l_1} \text{sen}^2(\theta) + \frac{E_2 A_2}{l_2} + \frac{E_3 A_3}{l_3} \text{sen}^2(\theta) \right) \\ \left(-\frac{E_1 A_1}{l_1} \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + \frac{E_3 A_3}{l_3} \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \right) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{E_1 A_1}{l_1} \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + \frac{E_3 A_3}{l_3} \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \right) \\ \left[\frac{E_1 A_1}{l_1} \cos^2(\theta) + \frac{E_3 A_3}{l_3} \cos^2(\theta) \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \text{sen}(\alpha) \\ -P \cos(\alpha) \end{Bmatrix}$$

substituindo os valores de A , E , l , e α na expressão anterior,

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 + 2\text{sen}^2(\theta) & 0 \\ 0 & 2\cos^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

Figura 2.25: *Figura do exemplo 2.6.1.b*

Resolvendo o sistema,

$$\Delta x = 0 \quad e \quad \Delta y = \frac{-Pl}{2EA \cos^2(\theta)}$$

considerando que,

$$N_1 = \frac{E_1 A_1}{l_1} \delta_1$$

onde,

$$\delta_1 = \underbrace{\Delta x}_{=0} \operatorname{sen}(\theta) - \Delta y \operatorname{cos}(\theta) = \Delta y \operatorname{cos}(\theta)$$

resolvendo as equações acima, o valor de N_1 será:

$$N_1 = \frac{P}{2 \operatorname{cos}(\theta)} \quad (\text{tração})$$

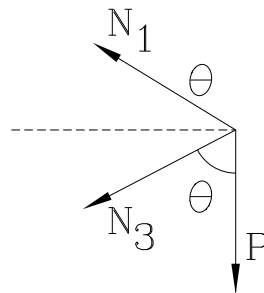
Analogamente para a barra 3, tem-se:

$$N_3 = -\frac{P}{2 \operatorname{cos}(\theta)} \quad (\text{compressão})$$

Este resultado pode ser verificado pelo equilíbrio de forças, uma vez que a treliça é estaticamente determinada.

Somando as forças na horizontal e na vertical, tem-se:

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 \operatorname{sen}(\theta) + N_3 \operatorname{sen}(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = -N_3$$

Figura 2.26: *Equilíbrio de forças do sistema*

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 \cos(\theta) - N_3 \cos(\theta) - P = 0$$

Então,

$$N_1 = \frac{P}{2\cos(\theta)} \quad e \quad N_3 = -\frac{P}{2\cos(\theta)}$$

Bibliografia

- [Allen e Haisler, 1985] Allen, D. H. e Haisler, W. E.; “*Introduction to Aerospace Structural Analysis*”, John Wiley & Sons, Inc., 1985.
- [Cowper, 1966] Cowper, G., R.; “*The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory*”, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, June 1966.
- [Oden e Ripperger, 1980] Oden, J. T. e Ripperger, E. A.; “*Mechanics of Elastic Structures*”, Hemisphere Publishing Corporation, 2^a ed., 1980.
- [Notas de Aula, 1994] Notas de aula do curso de *Análise Estrutural II*, Departamento de Engenharia Mecânica da U.F.M.G - Belo Horizonte, 1994.
- [Rivelo, 1969] Rivelo, R. M., “*Theory and Analysis of Flight Structures*”, McGraw-Hill, 1969.
- [Shames, 1983] Shames, I. H.; “*Introdução à Mecânica dos Sólidos*”, Prentice-Hall do Brasil, 1983.
- [Shames, 1985] Shames, I. H. and Dym, C. L., “*Energy and Finite Elements Methodes in Structures Mechanics*”, McGraw-Hill, 1985.
- [Timoshenko, 1921] Timoshenko, S. P., “*On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars*”, Philosophical Magazines, vol. 41, 1921, pp. 744-746.
- [Timoshenko e Gere, 1984] Timoshenko, S. P., Gere, J. E.; “*Mecânica dos Sólidos - Volume II*”, Livros Técnicos e Científicos, 1984.
- [Willems et al., 1983] Willems, N., Easley, J. T. e Rolfe, S. T.; “*Resistência dos Materiais*”, McGraw-Hill do Brasil, 1983.

Apêndice A

Integração das Energias de Deformação e Complementar em Três Dimensões

Obtém-se a seguir as expressões para a densidade de energia de deformação em termos das deformações e densidade de energia complementar em termos das tensões. São considerados os efeitos devido a variação de temperatura e deformação iniciais.

As relações constitutivas para materiais elásticos, isotrópicos e homogêneos podem ser escritas indicialmente por¹:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1 + \nu)}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) + \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^0)\delta_{ij} - \frac{E\alpha\Delta T}{(1 - 2\nu)}\delta_{ij} \quad (\text{A.1})$$

Em particular, para a tensão normal σ_{xx} , tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1 + \nu)}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^0) \\ &+ \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} [(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - (\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0)] - \frac{E\alpha\Delta T}{(1 - 2\nu)} \end{aligned}$$

Para integrar-se de $\alpha\Delta T$ até o estado deformado ε_{xx} , pode-se expressar $\varepsilon_{yy} = k_1 \varepsilon_{xx}$ e $\varepsilon_{zz} = k_2 \varepsilon_{xx}$ uma vez que a função de energia é independente do caminho de integração.

¹Notas de Aula de Introdução à Mecânica dos Sólidos.

Assim, σ_{xx} pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^0) + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [\varepsilon_{xx}(1+k_1+k_2) - (\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0)] \\ &\quad - \frac{E\alpha\Delta T}{(1-2\nu)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A expressão da densidade de energia de deformação é dada por:

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_{\alpha\Delta T}^{\varepsilon_{xx}} \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} + \int_{\alpha\Delta T}^{\varepsilon_{yy}} \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \int_{\alpha\Delta T}^{\varepsilon_{zz}} \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} + \\ &\quad + \int_0^{\varepsilon_{xy}} \sigma_{xy} d\varepsilon_{xy} + \int_0^{\varepsilon_{yx}} \sigma_{yx} d\varepsilon_{yx} + \int_0^{\varepsilon_{yz}} \sigma_{yz} d\varepsilon_{yz} + \\ &\quad + \int_0^{\varepsilon_{zy}} \sigma_{zy} d\varepsilon_{zy} + \int_0^{\varepsilon_{xz}} \sigma_{xz} d\varepsilon_{xz} + \int_0^{\varepsilon_{zx}} \sigma_{zx} d\varepsilon_{zx} \end{aligned}$$

Integrando-se o primeiro termo da função de densidade de energia de deformação, após substituir a equação da tensão normal σ_{xx} pela equação (A.2), vem que:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha\Delta T}^{\varepsilon_{xx}} \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} &= \int_{\alpha\Delta T}^{\varepsilon_{xx}} \left[\frac{E}{(1+\nu)}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^0) + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [\varepsilon_{xx}(1+k_1+k_2) + \right. \\ &\quad \left. - (\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0)] - \frac{E\alpha\Delta T}{(1-2\nu)} \right] d\varepsilon_{xx} \\ &= \frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\varepsilon_{xx}^2}{2} - \varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{xx} \right) + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\frac{\varepsilon_{xx}^2}{2} (1+k_1+k_2) + \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_{xx}(\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0) \right] - \frac{E\alpha\Delta T}{(1-2\nu)} \varepsilon_{xx} \\ &= \frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\varepsilon_{xx}^2}{2} - \varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{xx} \right) + \frac{\nu E}{2(1-2\nu)(1+\nu)} [\varepsilon_{xx}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \\ &\quad - \varepsilon_{xx}(\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0)] - \frac{E\alpha\Delta T}{(1-2\nu)} \varepsilon_{xx} \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha\Delta T}^{\varepsilon_{yy}} \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\varepsilon_{yy}^2}{2} - \varepsilon_{yy}^0 \varepsilon_{yy} \right) + \frac{\nu E}{2(1-2\nu)(1+\nu)} [\varepsilon_{yy}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \\ &\quad - \varepsilon_{yy}(\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0)] - \frac{E\alpha\Delta T}{(1-2\nu)} \varepsilon_{zz} \\ \int_{\alpha\Delta T}^{\varepsilon_{zz}} \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\varepsilon_{zz}^2}{2} - \varepsilon_{zz}^0 \varepsilon_{zz} \right) + \frac{\nu E}{2(1-2\nu)(1+\nu)} [\varepsilon_{zz}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \\ &\quad - \varepsilon_{zz}(\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0)] - \frac{E\alpha\Delta T}{(1-2\nu)} \varepsilon_{zz} \end{aligned}$$

Para as componentes de tensão de cisalhamento, pode-se re-escrever:

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1 + \nu)} (\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^0)$$

Integrando-se esta expressão, tem-se:

$$\int_0^{\varepsilon_{xy}} \sigma_{xy} d\varepsilon_{xy} = \int_0^{\varepsilon_{xy}} \frac{E}{(1 + \nu)} (\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^0) d\varepsilon_{xy} = \frac{E}{(1 + \nu)} \left(\frac{\varepsilon_{xy}^2}{2} - \varepsilon_{xy}^0 \varepsilon_{xy} \right)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon_{yz}} \sigma_{yz} d\varepsilon_{yz} &= \frac{E}{(1 + \nu)} \left(\frac{\varepsilon_{yz}^2}{2} - \varepsilon_{yz}^0 \varepsilon_{yz} \right) \\ \int_0^{\varepsilon_{xz}} \sigma_{xz} d\varepsilon_{xz} &= \frac{E}{(1 + \nu)} \left(\frac{\varepsilon_{xz}^2}{2} - \varepsilon_{xz}^0 \varepsilon_{xz} \right) \end{aligned}$$

Substituindo os valores das integrais acima na expressão da densidade de energia de deformação, tem-se:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{E}{2(1 + \nu)} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yx}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) \\ &+ \frac{\nu E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 \\ &- \frac{E}{(1 + \nu)} (\varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}^0 \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}^0 \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xy}^0 \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}^0 \varepsilon_{yx} \\ &+ \varepsilon_{yz}^0 \varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zy}^0 \varepsilon_{zy} + \varepsilon_{xz}^0 \varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zx}^0 \varepsilon_{zx}) \\ &- \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ &- \frac{E\alpha\Delta T}{(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \end{aligned} \tag{A.3}$$

Observe que, de forma genérica, $\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$. Por exemplo,

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xx}} = \sigma_{xx}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xx}} &= \frac{E}{(1 + \nu)} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^0) + \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} [(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - (\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0)] \\ &- \frac{E\alpha\Delta T}{(1 - 2\nu)} \\ &= \sigma_{xx} \end{aligned}$$

Para as componentes de tensão de cisalhamento,

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xy}} = \sigma_{xy}$$

como pode ser visto,

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xy}} = \frac{E}{(1 + \nu)} (\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^0) = \sigma_{xy}$$

A energia complementar U_0^* pode ser expressa em função das componentes do tensor de tensão. Nesse caso,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^0 + \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (\text{A.4})$$

ou, para caso da deformação normal, com $\sigma_{yy} = k_1 \sigma_{xx}$ e $\sigma_{zz} = k_2 \sigma_{xx}$,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} (1 + k_1 + k_2) + \varepsilon_{xx}^0 + \alpha \Delta T$$

A expressão da densidade de energia complementar é dada por:

$$\begin{aligned} U_0^* &= \int_{\alpha \Delta T}^{\sigma_{xx}} \varepsilon_{xx} d\sigma_{xx} + \int_{\alpha \Delta T}^{\sigma_{yy}} \varepsilon_{yy} d\sigma_{yy} + \int_{\alpha \Delta T}^{\sigma_{zz}} \varepsilon_{zz} d\sigma_{zz} \\ &+ \int_0^{\sigma_{xy}} \varepsilon_{xy} d\sigma_{xy} + \int_0^{\sigma_{yx}} \varepsilon_{yx} d\sigma_{yx} + \int_0^{\sigma_{yz}} \varepsilon_{yz} d\sigma_{yz} \\ &+ \int_0^{\sigma_{zy}} \varepsilon_{zy} d\sigma_{zy} + \int_0^{\sigma_{xz}} \varepsilon_{xz} d\sigma_{xz} + \int_0^{\sigma_{zx}} \varepsilon_{zx} d\sigma_{zx} \end{aligned}$$

Substituindo ε_{xx} no primeiro termo da equação da energia complementar e integrando, segue que:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \Delta T}^{\sigma_{xx}} \varepsilon_{xx} d\sigma_{xx} &= \int_{\alpha \Delta T}^{\sigma_{xx}} \left[\frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} (1 + k_1 + k_2) + \varepsilon_{xx}^0 + \alpha \Delta T \right] d\sigma_{xx} \\ &= \frac{(1 + \nu)}{E} \frac{\sigma_{xx}^2}{2} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{xx}}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \varepsilon_{xx}^0 \sigma_{xx} + \alpha \Delta T \sigma_{xx} \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\int_{\alpha \Delta T}^{\sigma_{yy}} \varepsilon_{yy} d\sigma_{yy} = \frac{(1 + \nu)}{E} \frac{\sigma_{yy}^2}{2} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{yy}}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) +$$

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha\Delta T}^{\sigma_{zz}} \varepsilon_{zz} d\sigma_{zz} &= \frac{(1+\nu)}{E} \frac{\sigma_{zz}^2}{2} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{zz}}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \\
&+ \varepsilon_{yy}^0 \sigma_{yy} + \alpha\Delta T \sigma_{yy} \\
\int_0^{\sigma_{xy}} \varepsilon_{xy} d\sigma_{xy} &= \frac{(1+\nu)}{E} \frac{\sigma_{xy}^2}{2} + \varepsilon_{xy}^0 \sigma_{xy} \\
\int_0^{\sigma_{yz}} \varepsilon_{yz} d\sigma_{yz} &= \frac{(1+\nu)}{E} \frac{\sigma_{yz}^2}{2} + \varepsilon_{yz}^0 \sigma_{yz} \\
\int_0^{\sigma_{xz}} \varepsilon_{xz} d\sigma_{xz} &= \frac{(1+\nu)}{E} \frac{\sigma_{xz}^2}{2} + \varepsilon_{xz}^0 \sigma_{xz}
\end{aligned}$$

Substituindo estas expressões na equação da densidade de energia complementar, obtém-se:

$$\begin{aligned}
U_0^* &= \frac{(1+\nu)}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yx}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{zx}^2) + \\
&- \frac{\nu}{2E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + \\
&+ (\varepsilon_{xx}^0 \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy}^0 \sigma_{yy} + \varepsilon_{zz}^0 \sigma_{zz} + \varepsilon_{xy}^0 \sigma_{xy} + \varepsilon_{yx}^0 \sigma_{yx} + \\
&+ \varepsilon_{yz}^0 \sigma_{yz} + \varepsilon_{zy}^0 \sigma_{zy} + \varepsilon_{xz}^0 \sigma_{xz} + \varepsilon_{zx}^0 \sigma_{zx}) + \\
&+ \alpha\Delta T (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Analogamente à energia de deformação, a derivada parcial da energia complementar em relação à componente de tensão σ_{ij} é igual à deformação ε_{ij} . Ou seja:

$$\frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$$

Por exemplo:

$$\frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \varepsilon_{xx}^0 + \alpha T = \varepsilon_{xx}$$

Para as deformações de cisalhamento,

$$\frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{xy}} = \varepsilon_{xy}$$

como pode ser verificado,

$$\frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{xy}} = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{xy} + \varepsilon_{xy}^0 = \varepsilon_{xy}$$